Exercices I : Second degré

■ **Exercice 1** (*) Les fonctions suivantes sont des fonctions polynômes du second degré, définies sur $\mathbb{R}$. Donner leur forme développée.

$f : x \mapsto (2x+3)^2$ $\quad g : x \mapsto (3x-4)(3x+4)$ $\quad h : x \mapsto \left(\frac{3}{2}x+\frac{4}{3}\right)^2$

$i : x \mapsto (2x-1)^2+3$ $\quad j : x \mapsto (5x+9)^2+\sqrt{7}^2$ $\quad k : x \mapsto (2x+\sqrt{5})^2+(3x)^2$

■ **Exercice 2** (*) Un adolescent laisse malencontreusement échapper son téléphone portable depuis le balcon du 5ème étage d'un immeuble. Après t secondes de chute, la hauteur h, en mètres, du téléphone par rapport au sol vaut

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2+15$$

où g est l'accélération de la pesanteur. $g \simeq 9.8 m.s^{-2}$

1. A quelle hauteur se trouve le 5ème étage de l'immeuble ?
2. Combien de temps mettra le téléphone avant de s'écraser lamentablement au sol ?

■ **Exercice 3** (**) Soit b et c deux réels et $f : x \mapsto x^2+bx+c$ une fonction polynôme du second degré, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Exprimer $f(-2)$ et $f(3)$ en fonction des réels b et c.
2. On suppose que $f(-2) = 4$ et $f(3) = 7$. En déduire les valeurs des réels b et c.

■ **Exercice 4** (*) Soit $f : x \mapsto x^2+12x+15$. Montrer que pour tout réel x, $f(x)$ s'écrit sous forme canonique $f(x) = (x+6)^2-21$

■ **Exercice 5** (*) Soit $f : x \mapsto 3x^2+24x+45$. Montrer que pour tout réel x, $f(x)$ s'écrit sous forme canonique $f(x) = 3(x+4)^2-3$

■ **Exercice 6** (*) Relier les expressions développées des polynômes, à gauche, à leur forme canonique, à droite

$2x^2-4x+7$ •	• $2(x+2)^2+5$
$2x^2+8x-5$ •	• $2(x-2)^2+3$
$2x^2+8x+13$ •	• $2(x+2)^2-13$
$2x^2-8x+11$ •	• $2(x-1)^2+5$
$2x^2-8x-11$ •	• $2(x-2)^2-19$

■ **Exercice 7** (**) Ecrire sous forme canonique les expressions des fonctions polynômes du second degré suivantes

$f : x \mapsto x^2+8x-7$ $\quad g : x \mapsto x^2+6x+9$ $\quad h : x \mapsto 2x^2+16x-4$

$i : x \mapsto -4x^2-16x+8$ $\quad j : x \mapsto 3x^2+5x-7$ $\quad k : x \mapsto 2x^2+5x$

■ **Exercice 8** (*) Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, dresser les tableaux de variation et indiquer si la fonction admet un minimum ou un maximum sur son ensemble de définition.

$$f : x \mapsto 3(x-4)^2+7 \qquad g : x \mapsto -2(x-5)^2-3 \qquad h : x \mapsto \frac{5}{3}\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{3}{2}$$

$$i : x \mapsto -5(x-9)^2 \qquad j : x \mapsto (\sqrt{5}-2)(x-2)^2+1 \qquad k : x \mapsto x^2+9$$

■ **Exercice 9** (**) Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, déterminer la forme canonique, puis dresser les tableaux de variation et indiquer si la fonction admet un minimum ou un maximum sur son ensemble de définition.

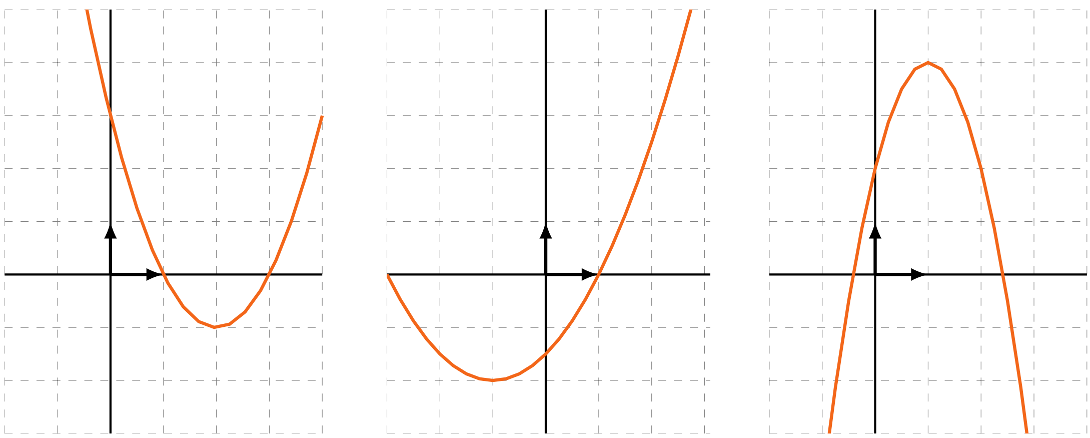
$$f : x \mapsto x^2+6x+7 \qquad g : x \mapsto -2x^2-4x+20$$

$$h : x \mapsto 3x^2+5x+14 \qquad i : x \mapsto -5x^2+12x$$

■ **Exercice 10** (**) Un canon est placé à 100 m d'altitude, à la position $x=0$. Il tire un boulet de canon dont la trajectoire est un arc de parabole, d'équation $y = -\frac{1}{4000}x^2+x+100$, où x désigne la distance au sol, en mètres, face au canon.

1. Quelle sera l'altitude maximale du boulet de canon ?
2. La cible du canon se situe à 0 mètre d'altitude, 5 kilomètres plus loin. Le canon atteindra-t-il sa cible ?

■ **Exercice 11** (*) Les courbes représentatives de plusieurs fonctions polynômes du second degré sont représentées ci-dessous. Dans chaque cas, déterminer une expression algébrique de la fonction, selon la variable réelle x.



■ **Exercice 12** (**) On choisit a, b et c trois réels, tels que $a \neq 0$. On considère la fonction $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous

x	$-\infty$		4		6		$+\infty$
f		↗	5	↘	3	↘	

1. Quel est le signe de a ? Justifier.
2. Pour tout réel x, exprimer $f(x)$ sous forme canonique.
3. En déduire la forme développée de $f(x)$

■ **Exercice 13** (*) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$x^2+3x+2=0 \qquad 2x^2-4x+1=0$$
$$3x^2+5x+7=0 \qquad 4x^2+12x+9=0$$
$$5x^2+10x+3=0 \qquad 2x^2+5x-7=0$$
$$x^2-\sqrt{2}x-3=0 \qquad 12x^2+12x+3=0$$

■ **Exercice 14** (*) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. L'utilisation d'un développement et/ou d'un discriminant dans cet exercice provoquera la mort d'un chaton. Ayez pitié pour eux.

$$6x^2+9x=0 \qquad 2(x+1)(3x+2)+(x+1)^2=0$$
$$(4x-5)^2-(3x+7)(4x-5)=0 \qquad (2x+3)^2=(3x-2)^2$$

■ **Exercice 15** (**) Donner les domaines de résolution puis résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{4x^2+3x-1}{x+2}=0 \qquad \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=0$$
$$\frac{-8x^2+6x+2}{x^2+3x-4}=0 \qquad \frac{3}{x-1}+\frac{4x}{2x-1}=0$$

■ **Exercice 16** (**) On considère l'équation (E), d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante

$$(E) \quad : \quad 3x^4+5x^2-12=0$$

1. Pour x un réel, on pose $X=x^2$. Réécrire l'équation (E) sous la forme d'une nouvelle équation (E'), d'inconnue X.
2. Résoudre l'équation (E').
3. En déduire les solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

■ **Exercice 17** (***) On considère l'équation (E), d'inconnue $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ suivante

$$(E) \quad : \quad -\frac{9}{(x-1)^2}+\frac{6}{x-1}+3=0$$

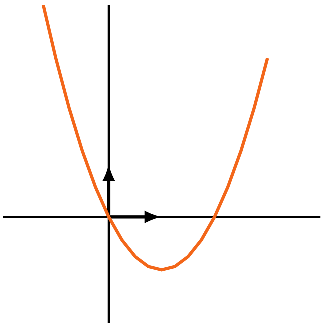
Résoudre cette équation. On pourra utiliser le changement de variable $X=\dfrac{1}{x-1}$

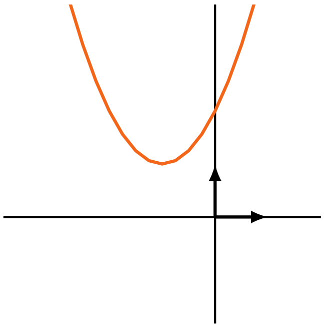
■ **Exercice 18** (**) On considère 3 réels a, b et c, avec a et c non nuls. On s'intéresse à l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

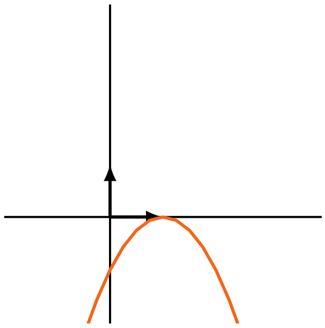
$$(E) \quad : \quad ax^2+bx+c=0$$

1. Montrer que si a et c sont de signes contraires, alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes.
2. La réciproque est-elle vraie ?

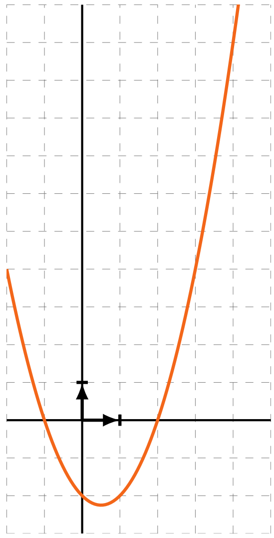
■ **Exercice 19** (*) Les fonctions, dont les courbes sont tracées ci-dessous dans un repère orthonormé, sont touets des fonctions polynomiales du second degré. Dans chacun des cas, déterminer graphiquement le signe du coefficient de x^2, ainsi que le signe du discriminant du polynôme.







■ **Exercice 20** (**) On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2 - x - 2$ et $g : x \mapsto 2x + 2$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$. La courbe de la fonction f est donnée ci-contre, tracée dans un repère orthonormé.



1. Résoudre graphiquement, puis par le calcul, l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. L'équation $f(x) = -3$ semble-t-elle avoir des solutions sur $\mathbb{R}$? Retrouver ce résultat par le calcul.
3. Dans ce même repère, tracer la courbe représentative de la fonction g.
4. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$ sur $\mathbb{R}$
5. Retrouver ces résultats par le calcul.

■ **Exercice 21** (*)

1. Déterminer les racines du polynôme $3x^2 + 8x + 4$.
2. En déduire la forme factorisée du polynôme $3x^2 + 8x + 4$

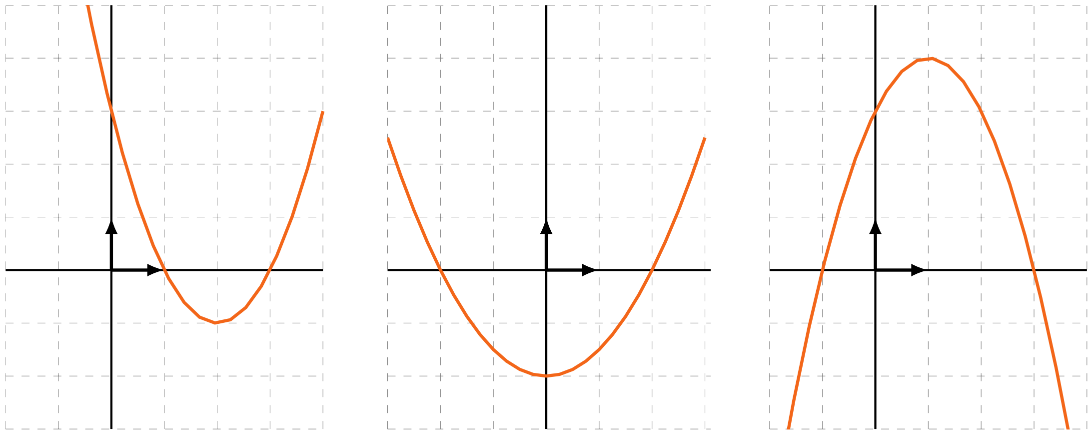
■ **Exercice 22** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto 8x^3 - 14x^2 - 7x + 6$, définie sur $\mathbb{R}$

1. Montrer que $f(1) = 0$.
2. On cherche trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

   En développant cette expression, déterminer les valeurs des réels a, b et c.
3. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$, puis une forme factorisation, pour tout réel x, de $f(x)$.

■ **Exercice 23** (*) Les courbes représentatives de plusieurs fonctions polynômes du second degré sont représentées ci-dessous. Dans chaque cas, déterminer une expression algébrique de la fonction, selon la variable réelle x, sous forme factorisée.



■ **Exercice 24** (*) Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$

$$x^2-5x+6>0 \qquad 2x^2+3x-5\leqslant 0$$

$$-5x^2+6x-1\geqslant 0 \qquad -8x^2+7x-4>0$$

■ **Exercice 25** (**) Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f : x \mapsto \sqrt{2x^2+7x+3} \qquad g : x \mapsto \frac{3x+7}{\sqrt{-2x^2-9x+11}}$$

■ **Exercice 26** (***) Soit m un réel, on considère l'équation (E), d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ suivante

$$(E) \quad : \quad 2x^2+mx+m+\frac{5}{2}$$

Déterminer, selon les valeurs de m, le nombre de solution de l'équation (E).

■ **Exercice 27** (**) **(Bac ES - Polynésie - 2014)**
On étudie la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient. On modélise cette concentration par la fonction g, définie pour tout t dans l'intervalle $[0;10]$ par :

$$g(t)=\frac{4t}{t^2+1}$$

$g(t)$ représente la concentration en mg.L^{-1} de l'antibiotique lorsque t heures se sont écoulées.

1. Dans quel intervalle de temps la concentration de l'antibiotique dans le sang sera-t-elle supérieure ou égale à 1.6 mg.L^{-1}
2. Après combien de temps la concentration de l'antibiotique dans le sang repassera-t-elle sous le seuil des 0.5 mg.L^{-1} ?

Exercice 28 (**) (Bac STMG (en un poil plus corsé) - Antilles et Guyane - 2018)
Une entreprise produit des panneaux solaires. Une étude de marché permet d'estimer que la production pour le mois à venir est comprise entre 0 et 5000 panneaux solaires.
On s'intéresse au bénéfice de l'entreprise sur la vente des panneaux solaires produits.
On décide de modéliser l'évolution du bénéfice de l'entreprise, exprimé en centaine d'euros, par la fonction f définie ci-dessous :

$$f(x) = -2x^2 + 90x - 400, \text{ pour } x \in [0;50]$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $[0;50]$.
2. Pour quelles productions l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?
3. En utilisant la forme canonique, déterminer la production pour laquelle le bénéfice est maximal. Que vaut alors ce bénéfice ?

Exercice 29 (*) Pour chacune des équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, déterminer une solution évidente, puis déterminer la deuxième sans calcul du discriminant.

$$3x^2 - 5x + 2 = 0 \qquad 2x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$4x^2 + 11x + 7 = 0 \qquad 2x^2 + \sqrt{3}x - 9 = 0$$

Exercice 30 (**) Trouver deux réels dont la somme vaut 10 et dont le produit vaut 13

Exercice 31 (**) Existe-t-il deux réels dont la somme vaut 9 et le produit vaut 27 ?

Exercice 32 (**) Pour placer un grillage autour d'un jardinet rectangulaire de 32 m^2, un particulier a dû utiliser 36 m de grillage. Quelles sont les dimensions exactes de ce jardin ?

Exercice 33 (***) Soit x un réel. On appelle partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, le plus petit entier relatif inférieur ou égal à x. On appelle mantisse de x (ou, de manière abusive, partie décimale de x), le nombre $x - \lfloor x \rfloor$.

1. Déterminer la partie entière et la mantisse de 0.785. Faire de même avec -1.84.
2. Montrer que deux réels x et y ont même mantisse si et seulement si $x - y \in \mathbb{Z}$
3. Trouver deux réels x et y, inverses l'un de l'autre, de même mantisse, et dont l'un a pour partie entière 2019.