Exercices I : Ensembles de Nombres

■ **Exercice 1** (*)
1. Donner l'ensemble des diviseurs de 18 et 24.
2. Quel est le plus grand diviseur commun à 18 et 24 ? On le note D.
3. Quel est le plus petit multiple commun à 18 et 24 ? On le note m.
4. Comparer 18×24 et $m \times D$.

■ **Exercice 2** (*) On dit qu'un nombre est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs stricts. Par exemple, les diviseurs positifs stricts de 6 sont 1, 2 et 3 et $6 = 1+2+3$. Montrer que 28 est un nombre parfait.

R A ce jour, on ne sait pas s'il existe une infinité de nombres parfaits: on n'en connait qu'une cinquantaine, le plus grand étant composé de plus de 46 millions de chiffres.

■ **Exercice 3** (**) Les babyloniens comptaient non pas par dizaine comme nous le faisons mais par soixantaine. C'est la raison pour laquelle, de nos jours, une heure fait 60 minutes et une minute fait 60 secondes.
1. Déterminer tous les diviseurs positifs du nombre 60.

Tous les nombres strictement inférieurs à 60 ont moins de diviseurs que celui-ci. On dit que 60 est hyper-composé.

2. Montrer que 6 et 12 sont des nombres hyper-composés.

■ **Exercice 4** (**) Trouver 4 multiples consécutifs de 7 dont la somme vaut 406.

■ **Exercice 5** (*) Les propositions suivantes sont fausses. Donner un contre-exemple pour chacune d'elles.

1. La différence de deux entiers naturels est un entier naturel
2. La somme de deux diviseurs de 24 est un diviseur de 24.
3. Le quotient de deux entiers relatifs non nuls est un entier relatif.

■ **Exercice 6** (**) Montrer que si un nombre est un multiple de 24, alors c'est un multiple de 6 et un multiple de 4. La réciproque est-elle vraie ?

■ **Exercice 7** (**) Démontrer que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair

■ **Exercice 8** (**) Démontrer que le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.

■ **Exercice 9** (*) Sans les calculer, déterminer la parité des nombres suivants.

47182^2 $\quad$ 12478×71525 $\quad$ 5^{281} $\quad$ $17 \times (2^{16}+33)$ $\quad$ $2^{178}+3^{44}$

■ **Exercice 10** (*) Décomposer les entiers suivants en produits de facteurs premiers

32 $\quad$ 45 $\quad$ 98 $\quad$ 100 $\quad$ 144

Exercice 11 (*)

1. Décomposer 120 et 420 en produit de facteurs premiers
2. Sans calculer directement le nombre, déterminer la décomposition en facteurs premiers de 120×420
3. Déterminer la décomposition en facteurs premiers de $(120 \times 420)^3$

Exercice 12 (*)

1. Décomposer 24 en produit de facteurs premiers
2. Calculer $p^2 - 1$ pour $p = 5$, $p = 7$ et $p = 13$.
3. En décomposant les nombres obtenus en produits de facteurs premiers, montrer que 24 les divise tous.
4. (***) : Montrer que $p^2 - 1$ est un multiple de 24 pour tout nombre p premier supérieur ou égal à 5

Exercice 13 (*) Sans calculatrice, écrire les nombres rationnels suivants sous la forme d'une fraction irréductible

$$\frac{45}{20} \qquad \frac{63}{42} \qquad \frac{121}{66} \qquad \frac{51}{85} \qquad \frac{28}{210}$$

Exercice 14 (*) Sans calculatrice, effectuer les calculs suivants

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{3} \qquad \frac{2}{9} - \frac{8}{15} \qquad \frac{6}{7} \times \frac{14}{15} \qquad \frac{64}{81} : \frac{128}{27}$$

Exercice 15 (*) Parmi les nombres suivants, lesquels sont décimaux ?

$$-25 \qquad \frac{3}{7} \qquad \frac{28}{1000} \qquad \frac{30}{0.1} \qquad \frac{217}{40}$$

Exercice 16 (**) On dit qu'un nombre possède un développement décimal périodique lorsqu'une séquence de nombres se répète infiniment, les unes à la suite de l'autre. Par exemple $\frac{1}{37} = 0.027027027...$ et ainsi de suite. 027 est donc la période décimale de $\frac{1}{37}$. On note alors $\frac{1}{37} = 0.\overline{027}$.

1. Quelle est la période de $\frac{1}{3}$? de $\frac{45}{11}$?
2. On cherche une écriture fractionnaire du nombre $x = 0.\overline{27}$.
   (a) Que vaut $100x$?
   (b) Calculer $100x - x$ et en déduire une écriture fractionnaire simplifiée de x.

Exercice 17 (*) Compléter les pointillés avec les symboles $\in$ ou $\notin$.

$2 \ldots \mathbb{N}$	$2 \ldots \mathbb{Z}$	$2 \ldots \mathbb{Q}$
$\frac{3}{5} \ldots \mathbb{Z}$	$(\sqrt{2})^4 \ldots \mathbb{N}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \ldots \mathbb{Q}$
$(1-\sqrt{6})(1+\sqrt{6}) \ldots \mathbb{Z}$	$\frac{5^5}{5^{-2}} \ldots \mathbb{N}$	$(1+\sqrt{2})^2 \ldots \mathbb{Q}$

Exercice 18 (*) Vrai ou faux ? Le produit de deux nombres irrationnels est toujours irrationnel.

■ **Exercice 19** (*) Simplifier au maximum les expressions suivantes

$A=\sqrt{16}$ $\quad B=\sqrt{8}$ $\quad C=\sqrt{18}$ $\quad D=\sqrt{\dfrac{81}{49}}$

$E=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ $\quad F=\dfrac{\sqrt{6}\times\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ $\quad G=\dfrac{\sqrt{27}\times\sqrt{8}}{\sqrt{24}}$ $\quad H=(\sqrt{5})^4$

■ **Exercice 20** (**) Développer et réduire au maximum les expressions suivantes

$A=(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$ $\quad B=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$

$C=(3+\sqrt{8})(4+\sqrt{2})$ $\quad D=(\sqrt{12}-\sqrt{27})^2$

■ **Exercice 21** (**) Simplifier au maximum l'expression $A=2\sqrt{20}-\sqrt{45}+\sqrt{125}$

■ **Exercice 22** (***) On appelle nombre d'or, noté φ, le réel $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer que multiplier φ par lui-même revient à lui ajouter 1.

■ **Exercice 23** (**) On considère un triangle ABC tel que $AB=4\sqrt{3}$, $BC=2\sqrt{12}$ et $CA=4\sqrt{6}$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

■ **Exercice 24** (**) Ecrire les expressions suivantes sous la forme $a+b\sqrt{c}$.

$\dfrac{3}{1+\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{4}{2-3\sqrt{5}}$ $\quad \dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{7}}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{6})}$

■ **Exercice 25** (***) L'objectif de l'exercice est de montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Nous allons procéder par l'absurde. Supposons qu'il existe $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{N}$, $b\neq 0$, tels que $\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$. Sans perte de généralité, on supposera que cette fraction est irréductible.

1. Montrer que $b^2=2a^2$.
2. En déduire que b est pair.
3. En écrivant $b=2k$, pour un certain $k\in\mathbb{N}$, montrer que a est également pair.
4. Conclure.

■ **Exercice 26** (*) Compléter les pointillés avec les symboles $\in$ ou $\notin$.

$2\ldots[0;5]$	$2.2\ldots]2;7]$	$3\ldots]0;3]$
$\dfrac{3}{2}\ldots]1;2[$	$8\ldots\{5;9\}$	$-3\ldots]-10;-\pi]$
$6\ldots]-\infty;4]$	$-12\ldots]-5\pi;+\infty[$	$\dfrac{36}{15}\ldots[2;3]$

■ **Exercice 27** (*) Ecrire les intervalles suivants sous la forme d'une inégalité.

[1;3]	]2;7]	[5,+∞[
]-1;0[	]-∞;7[	]-∞;7]

■ **Exercice 28** (*) Ecrire les inégalités suivantes sous la forme d'intervalles

$2<x<3$	$-5\leq x<12$	$7\geq x\geq 3$
$x\leq -10$	$1.1\geq x$	$11\leq x\leq 12$
$3<x$	$x\geq 3$	$1>x>0$

■ **Exercice 29** (*) Résoudre les inéquations suivantes et présenter les solutions sous la forme d'intervalle.

$3x-4<8$	$9x+5>5x-1$	$6x-3\leq 8x+2$
$5(2x+3)\geq 7x+20$	$\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}<\frac{1}{10}x+\frac{4}{15}$	$\frac{3}{7}x-\frac{2}{9}\geqslant\frac{8}{5}x+\frac{1}{3}$

■ **Exercice 30** (*) Soit $x\in[-3;4]$. Donner un encadrement de $3x-5$.

■ **Exercice 31** (*) Soit $x\in[-1;5]$. Donner un encadrement de $-2x+4$.

■ **Exercice 32** (*) Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$

$\|x\|=8$	$\|x\|=4$	$\|x-2\|=5$
$\|x-7\|=10$	$\|x+1\|=4$	$\|x+4\|=-2$

■ **Exercice 33** (*) Soit x et y deux réels. A-t-on toujours $|x+y|=|x|+|y|$?

■ **Exercice 34** (***) Soit x et y deux réels de même signe. A-t-on $|x+y|=|x|+|y|$?

■ **Exercice 35** (**) Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$

$\|x\|\leqslant 7$	$\|x\|\geqslant 4$	$\|x-2\|\leqslant 3$
$\|x-4\|<19$	$\|x+20\|\geqslant 31$	$\|x+4\|<\frac{1}{10}$

■ **Exercice 36** (**) Traduire chacun des intervalles suivants à l'aide d'une inéquation de la forme $|x-a|\leqslant b$

$[3;9]$	$[-1;5]$	$[-2;0]$
$[3;8]$	$[10;19]$	$[-5;12]$

■ **Exercice 37** (***) Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$

$\|2x+1\|\leqslant 7$	$\|3-x\|\geqslant 8$	$\|5-2x\|\leqslant 1$

■ **Exercice 38** (*) Compléter les pointillés avec les symboles $\in$ ou $\notin$.

$3\ldots[1;5]\cup[7;+\infty[$	$3\ldots[1;5]\cap[7;+\infty[$	$3\ldots[-2;3[\cup]3;7]$
$\sqrt{2}\ldots[-2;0]\cup\mathbb{R}$	$-5\ldots[-6;12]\cap\mathbb{N}$	$\frac{47}{4}\ldots[4;5]\cup\mathbb{Q}$

■ **Exercice 39** (**) Déterminer, dans chaque cas, l'intersection et l'union des intervalles.

[3;7] et [5;9]	]4;8] et [5;10]	[3;5] et [1;7[
]-∞ ; 5] et [3;7]	[1;2] et]2;5]	[-2;-1[et]-1.5;+∞[

■ **Exercice 40** (***) Soit I, J et K trois intervalles.
A-t-on toujours $(I\cap J)\cup K=I\cap(J\cup K)$?