Chapitre II : Généralités sur les fonctions

1 Vocabulaire

1.1 Définition et exemples

Définition 1.1 Soit D une partie de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.
Définir une fonction sur D, c'est associer à chaque réel x de D un **UNIQUE** nombre réel, noté $f(x)$.
D est appelé **domaine de définition** de f.

Notation 1.1. *On notera $f : x \mapsto f(x)$ pour la fonction qui à x associe $f(x)$.*

■ **Exemple 1.1** On considère $D = \left\{-1.2, 3, 0, \frac{7}{3}\right\}$.
On résume les informations d'une fonction f dans un tableau :

x	-1.2	3	0	$\frac{7}{3}$
$f(x)$	4	7	π	7

f est bien une fonction car chaque réel de D est associé à un unique réel de $\mathbb{R}$. On a ainsi $f(-1.2) = 4$, $f(3) = 7$... ■

■ **Exemple 1.2** On considère la fonction g définie sur $I = [0;3]$ par $g(x) = 2x+3$.
On a par exemple $g(0) = 2 \times 0 + 3 = 3$, $g(1) = 2 \times 1 + 3 = 5$... ■

1.2 Image, antécédents

Définition 1.2 Soit f une fonction définie sur un domaine de définition D. Soit $x \in D$.

- On dit que $f(x)$ est L'image de x par f.
- On dit que x est UN antécédent de $f(x)$ par f.

R L'antécédent doit TOUJOURS appartenir au domaine de définition !

■ **Exemple 1.3** 4 est l'image de -1.2 par la fonction f donnée précédemment. 7 possède plusieurs antécédents par f : 3 et $\frac{7}{3}$. ■

■ **Exemple 1.4** On considère la fonction g définie au paragraphe précédent.

- $g(0) = 3$. 3 est l'image de 0 par g. 0 est un antécédent de 3 par g.
- On cherche un antécédent de 7 par g. On cherche donc à résoudre l'équation $g(x) = 7$.

$$\begin{aligned} g(x) &= 7 \\ 2x+3 &= 7 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

De plus, $2 \in I = [0;3]$. 2 est donc un antécédent de 7 par g.
- On sait que $2 \times 6 + 3 = 15$. Or, $6 \notin I$. 6 n'est donc pas un antécédent de 15 par g.

■

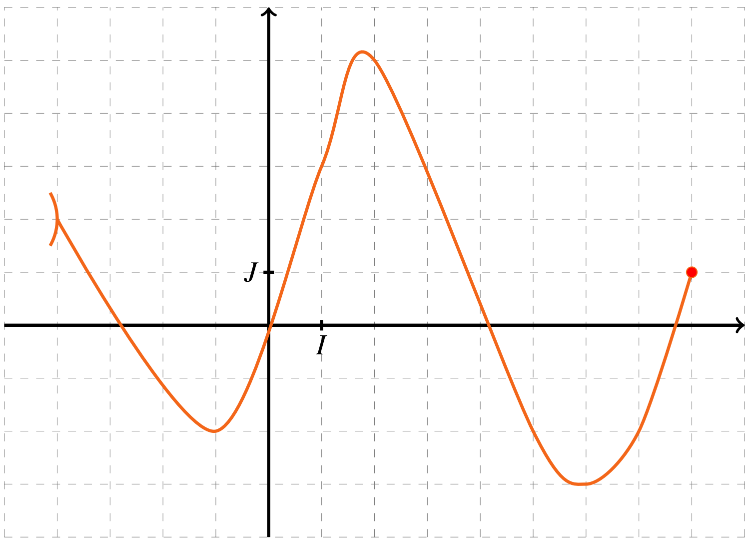
2 Représentation graphique

R Dans toute la suite, on se place dans un repère (O, I, J) orthonormé. Nous redéfinirons les repères dans un prochain chapitre.
On rappelle que la première coordonnée, l'abscisse, se lit sur l'axe horizontal et la deuxième coordonnée, l'ordonnée, se lit sur l'axe vertical.

2.1 Courbe représentative

Définition 2.1 Soit f une fonction et D son domaine de définition.
On appelle **représentation graphique** de f (ou courbe représentative de f) l'ensemble des points M de coordonnées $(x; f(x))$, pour tout $x \in D$.
On note en général cette courbe C_f.

■ **Exemple 2.1** On trace la représentation graphique d'une certaine fonction h.



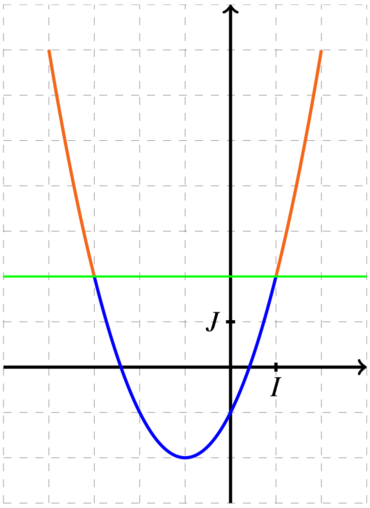
- Le domaine de définition de h est $]-4; 8]$.
- Le point de coordonnées $(-1; -2)$ est sur la courbe, ce qui signifie que $h(-1) = -2$.
- L'image de 1 par h est 3.
- -2 a trois antécédents par h : -1, 5 et 7
- 6 n'a pas d'antécédent par h.

■

2.2 Résolutions graphiques

Equation $f(x) = k$ ou inéquation $f(x) \geqslant k$

■ **Exemple 2.2** Soit f définie sur $I = [-4;2]$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1$.



On donne la courbe représentative de f ci-contre.

Pour résoudre l'équation $f(x) = 2$ sur I, c'est-à-dire déterminer les antécédents de 2 par f, on regarde les points de la courbe dont l'ordonnée vaut 2.
Les antécédents de 2 par f sont -3 et 1. Les solutions de $x^2 + 2x - 1 = 2$ sur I sont donc -3 et 1.

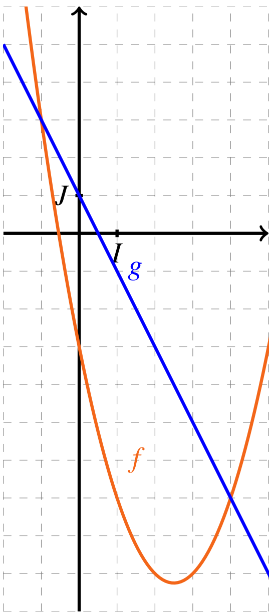
Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 2$ sur I revient à déterminer l'ensemble des abscisses des points de la courbe représentative de f dont l'ordonnée est supérieure ou égale à 2.

Dans notre cas, l'ensemble des solutions est $S = [-4;-3] \cup [1;2]$.

■

Equation $f(x) = g(x)$ ou inéquation $f(x) \leqslant g(x)$

■ **Exemple 2.3** Soit f et g définies sur $I = [-2;6]$ par $f(x) = x^2 - 5x - 3$ et $g(x) = -2x - 1$.



On donne les courbes représentatives de f et g ci-contre.

Pour résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ sur I, on cherche les x correspondants aux *points d'intersection* des courbes représentatives de ces deux fonctions
Ici, les courbes se croisent pour $x = -1$ et $x = 4$. Les solutions de $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire $x^2 - 5x - 3 = -2x - 1$ sur I sont donc -1 et 4.

Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ sur I revient à déterminer l'ensemble des abscisses pour lesquelles la courbe de f est *au-dessus* de celle de g.

Dans notre cas, l'ensemble des solutions est
$S = [-2;-1] \cup [4;6]$.

■