Exercices III : Suites numériques

■ **Exercice 1** (*) Déterminer les termes de rang 0, 1, 2 et 3 de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = -7n+2 \qquad u_n = n^2-1 \qquad u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

■ **Exercice 2** (*) On considère la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 3n - 1$

1. Calculer u_0, u_1, u_{10}.
2. Existe-t-il un $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 0$?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > -3$

■ **Exercice 3** (*) On considère la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2
2. Trouver un entier k tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+k} = u_n$

■ **Exercice 4** (*) Soit (u_n) une suite numérique et $n \in \mathbb{N}$. Dans chacun des cas suivants, exprimer u_{n+1} en fonction de n.

$$u_n = 4n-7 \qquad u_n = \frac{2n-1}{3n+6} \qquad u_n = 2n^2-5n+8$$

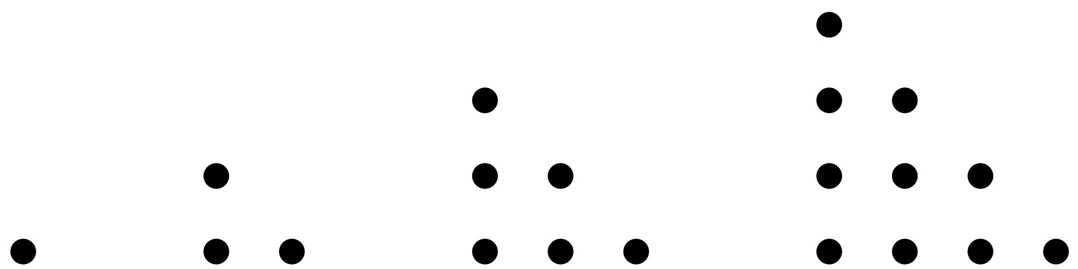
$$u_n = (n-1)^5 \qquad u_n = (3n+7)^2 \qquad u_n = \sqrt{2n^2-4n+2}$$

■ **Exercice 5** (*) Pour chacune des suites numériques suivantes, calculer les termes de rang 1, 2 et 3.

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = 256 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{v_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} w_0 = -3 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = w_n + n \end{cases}$$

■ **Exercice 6** (**) Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit que k est un nombre triangulaire s'il est possible de placer k pastilles de manière à représenter un triangle, comme sur la figure ci-dessous. On note u_n le n-ième nombre triangulaire.



1. Que valent u_1, u_2 et u_5 ?
2. Exprimer la suite (u_n) à l'aide d'une relation de récurrence.

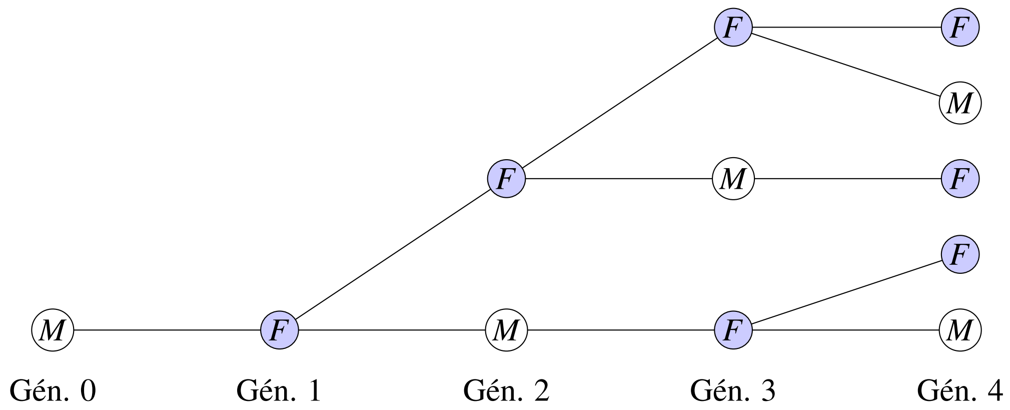
▪ **Exercice 7** (**) Pour chacune des suites numériques suivantes, calculer les termes de rang 2, 3 et 4.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} \times u_n \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = 3 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (u_{n+1})^2 - (u_n)^2 \end{cases}$$

▪ **Exercice 8** (*) Chaque année, 70% des adhérents d'une association de passionnés de mathématiques renouvellent leur adhésion et 500 nouvelles personnes se joignent à eux. En 2016, cette association compte 2000 abonnés. On note a_n le nombre d'abonnés en l'an 2016+n.

1. Que valent a_1 et a_2 ?
2. Exprimer la suite (a_n) à l'aide d'une relation de récurrence.

▪ **Exercice 9** (***) Chez les fourmis, lorsque la reine pond un oeuf, elle peut décider ou non de le féconder à l'aide d'un spermatozoïde, stocké dans une spermathèque. Si l'oeuf est fécondé, il donnera naissance à une femelle. Sinon, il donnera naissance à un mâle. Oui, la fourmi peut décider si elle aura un garçon ou une fille !
On s'intéresse à l'arbre généalogique d'une fourmi mâle. On notera M si l'ascendant est un mâle et F si c'est une femelle.



On note a_n le nombre d'ascendants de la fourmi mâle à la n-ième génération. On note m_n et f_n le nombre d'ascendants mâles et d'ascendants femelles à la n-ième génération.
On a par exemple $a_1 = 1$, $m_1 = 0$ et $f_1 = 0$.

1. Compléter le tableau de valeurs suivants

n	1	2	3	4	5	6
m_n	0					
f_n	1					
a_n	1					

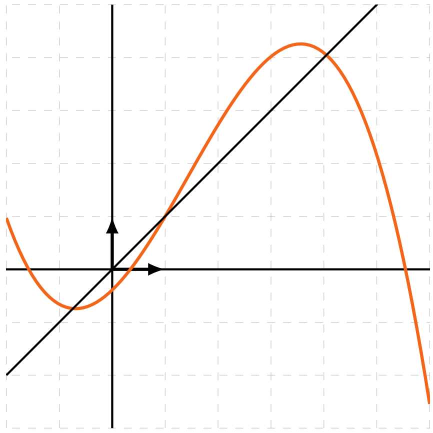
2. Pour tout entier naturel n, exprimer a_n en fonction de m_n et f_n.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer m_{n+1} et f_{n+1} en fonction de m_n et f_n
4. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

R Une telle relation est dite "de Fibonacci", du nom d'un mathématicien italien du XIIIe siècle. Plutôt que d'étudier l'ascendance d'une fourmi, celui-ci étudiait la descendance d'un couple de lapin. Chacun son truc.

Exercice 10 (*) Pour chacune des suites suivantes, calculer les termes de rang 0 à 5 puis les représenter dans un repère orthonormé.

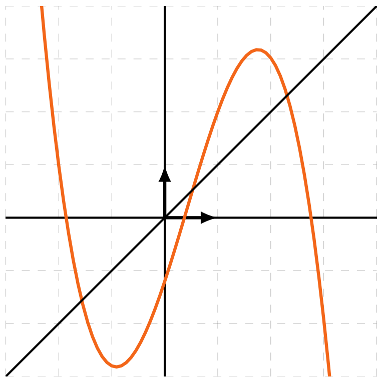
$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 - 2u_n \end{cases} \qquad (v_n) : \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = 4 - 2n$$

$$(w_n) : \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{n^2 - 1}{n+1} \qquad (a_n) : \begin{cases} a_0 = 1 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 1 - a_n \end{cases}$$



Exercice 11 (*) On a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormé. On considère la suite (u_n) définie pour tout n par $u_n = f(n)$. Déterminer graphiquement les valeurs de u_1, u_3, u_4 et u_5.

Exercice 12 (**) On utilise la même fonction f. On pose $v_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$. Déterminer graphiquement des valeurs approchées de v_1, v_2 et v_3.



Exercice 13 (*) On a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormé. On considère la suite (u_n) définie pour tout n par $u_n = f(n)$. Déterminer graphiquement les valeurs de u_1, u_2, u_3

Exercice 14 (**) On utilise la même fonction f. On pose $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$. Déterminer la valeur de v_{2019}.

Exercice 15 (*) Soit (u_n) une suite numérique. Dans chacun des cas suivants, déterminer le sens de variations de la suite (u_n)

$$u_n = -5n + 3 \qquad u_n = n^2 \qquad u_n = 3n + 4$$

$$u_n = n^2 + 2n - 3 \qquad u_n = \frac{1}{n+1} \qquad u_n = 5^{n+1} - 5^n$$

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 12n - 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = -3 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n^2+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = \pi \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1 - u_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = -1 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3n^2 + 2n + 7 \end{cases}$$

Exercice 16 (**) On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + n$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+4} = u_n + 4$
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
4. La fonction $f : x \mapsto \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right) + x$, définie sur $\mathbb{R}$, est-elle croissante sur $\mathbb{R}$?

Exercice 17 (*) Soit (u_n) une suite numérique. Dans chacun des cas suivants, déterminer le sens de variations de la suite (u_n)

$$u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad u_n = \frac{n}{n+1} \qquad u_n = \frac{3^n}{n}$$

Exercice 18 (*) Soit (u_n) une suite numérique. Dans chacun des cas suivants, étudier la monotonie de la suite (u_n). On admettra que tous les termes de la suite sont strictement positifs.

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1 = 4 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}*, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1+u_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = -1 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 7 - 14n \end{cases}$$

Exercice 19 (*) Soit (u_n) une suite numérique. Dans chacun des cas suivants, conjecturer une limite, si elle existe, pour la suite (u_n)

$$u_n = \frac{2}{3n+4} \qquad u_n = 2 + \frac{1}{n} \qquad u_n = (-1)^n$$

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 4 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

Exercice 20 (*) Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{4n+5}{2n+3}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $u_n - 2$ sous la forme d'un quotient.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 21 (*) On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 7n - 2$

- Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?
- A partir de quel rang n_0 a-t-on toujours, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n > 1000$?

Exercice 22 (*) On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -2n^2 + 5n + 1$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$
2. La limite de la suite (u_n) peut-elle être $+\infty$?

Exercice 23 (**) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 3n^2 + 6n - 5000$

1. Quelle semble être la limite de (v_n) ?
2. A partir de quel rang n_0 a-t-on toujours, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n > 1000$?

Exercice 24 (*) Vrai ou faux ? Toute suite strictement croissante admet pour limite $+\infty$.

Exercice 25 (**) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n\cos^2\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, que vaut v_{2n} ?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, que vaut v_{2n+1} ?
3. Peut-on dire que la suite (v_n) admet une limite ?