Chapitre III : Suites numériques

1 Notion de suite

1.1 Généralités

Définition 1.1 Une *suite numérique* u est une fonction définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

On note en général u_n l'image de n par la suite u, également appelé *terme de rang n*.
La suite u est également notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n)

■ **Exemple 1.1** On peut définir la suite (u_n) des nombres impairs. On a alors $u_0 = 1$, $u_1 = 3$; $u_2 = 5$... ■

R Comme pour les fonctions, on peut définir une suite à l'aide d'une formule explicite.

■ **Exemple 1.2** On considère la suite (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{R}$, $u_n = 3n+4$. On a alors :
- $u_0 = 3\times 0+4 = 4$
- $u_1 = 3\times 1+4 = 7$
- $u_2 = 3\times 2+4 = 10$...

■

1.2 Génération par récurrence

Définition 1.2 On dit qu'une suite (u_n) est définie par récurrence (d'ordre 1) lorsqu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Autrement dit, tout terme de la suite se construit à partir du terme précédent.

■ **Exemple 1.3** On définit la suite (u_n) comme suit :
- $u_0 = -2$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 3$

On a ainsi
- $u_1 = u_0^2 + 3 = (-2)^2 + 3 = 7$
- $u_2 = u_1^2 + 3 = 7^2 + 3 = 52$
- $u_3 = u_2^2 + 3 = 52^2 + 3 = 2707$

■

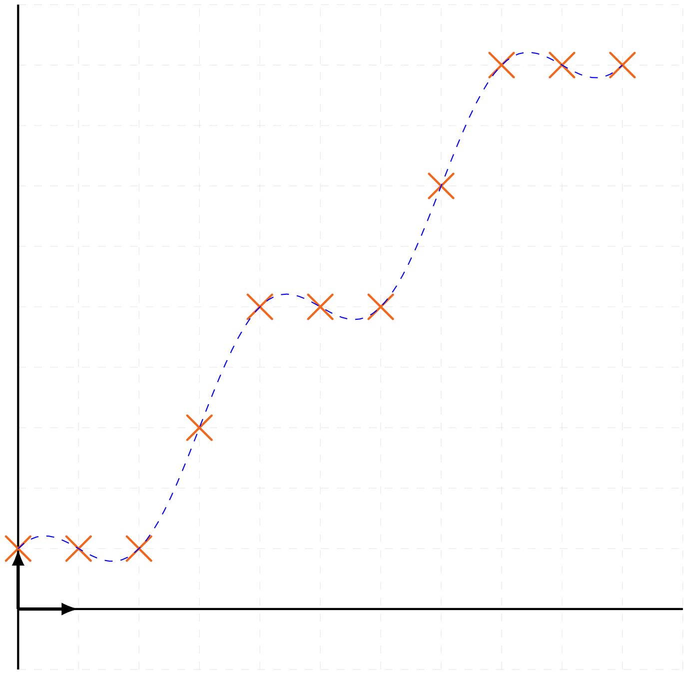
1.3 Représentation graphique

Définition 1.3 On se place dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. La représentation graphique d'une suite est l'ensemble des points de coordonnées $(n : u_n)$

R Si la suite est définie par une formule explicite f, il s'agit simplement de l'ensemble des points de la courbe représentative de f dont les abscisses sont des entiers naturels.

■ **Exemple 1.4** On considère la suite (u_n) telle que, pour tout n, $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + n$.

- $u_0 = \cos(0) + 0 = 1$, on place le point de coordonnées $(0;1)$
- $u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 1$, on place le point de coordonnées $(1;1)$
- $u_2 = \cos(\pi) + 2 = 1$, on place le point de coordonnées $(2;1)$...



■

2 Sens de variation d'une suite

Définition 2.1 Soit (u_n) une suite numérique et $n_0 \in \mathbb{N}$

- On dit que (u_n) est croissante à partir du rang n_0 si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- On dit que (u_n) est décroissante à partir du rang n_0 si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- On dit que (u_n) est constante à partir du rang n_0 si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = u_{n+1}$.

R Si la suite est croissante à partir du rang 0, on ne précisera pas forcément ce rang...

R Comme pour les fonctions, il existe des strictes croissances et décroissances de suite.

■ **Exemple 2.1** Soit (u_n) la suite définie pour tout n par $u_n = 2n^2 + 5n - 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1)^2 + 5(n+1) - 3 - (2n^2 + 5n - 3) \\ &= 2(n^2 + 2n + 1) + 5n + 5 - 3 - 2n^2 - 5n + 3 \\ &= 2n^2 + 4n + 2 + 5 - 2n^2 \\ &= 4n + 7 > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc strictement croissante. ■

Propriété 2.1 Soit $n_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et monotone sur $[n_0;+\infty[$.
La suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$, est monotone à partir du rang n_0, de même monotonie que f.

Démonstration 2.1 Supposons que la fonction f est croissante sur $[n_0;+\infty[$. Soit $n \geqslant n_0$. Puisque $n \leqslant n+1$, par croissance de f sur $[n_0;+\infty[$, $f(n) \leqslant f(n+1)$, c'est-à-dire $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.
La démonstration est analogue si f est décroissante. □

R La réciproque est fausse ! La suite $\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$ est croissante, mais la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)$ n'est pas monotone !

Propriété 2.2 Soit (u_n) une suite dont les termes sont tous **strictement positifs** et $n_0 \in \mathbb{N}$.

- (u_n) est croissante à partir du rang n_0 si et seulement si, pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
- (u_n) est décroissante à partir du rang n_0 si et seulement si, pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

■ **Exemple 2.2** Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2^n}{n}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1}$

Or, pour tout $n > 1$, on a $n+n > n+1$, c'est-à-dire $2n > n+1$, soit $\frac{2n}{n+1} > 1$
Ainsi, pour tout $n > 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. La suite (u_n) est donc croissante à partir du rang 1. ■

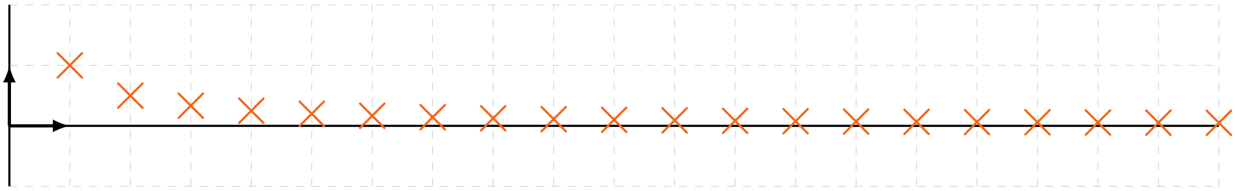
3 Limite d'une suite

R En classe de Première générale, le programme se limite à une approche intuitive de la limite. Celle-ci sera davantage développée en classe de Terminale pour les chanceux qui continueront les mathématiques.

3.1 Limite finie

Définition 3.1 Soit (u_n) une suite numérique.
On dit que la suite (u_n) converge vers 0 si les termes de la suite "se rapprochent de 0" lorsque n augmente.
On dit que 0 est la limite de la suite (u_n) et $+\infty$, ce que l'on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

■ **Exemple 3.1** On considère la suite (u_n) définie pour tout $n > 0$ par $u_n = \frac{1}{n}$
$u_1 = 1$, $u_{10} = 0.1$, $u_{100} = 0.01$, $u_{100000} = 0.00001...$
La limite de la suite (u_n) en $+\infty$ semble être 0. On peut l'observer sur la représentation graphique de la suite. ■

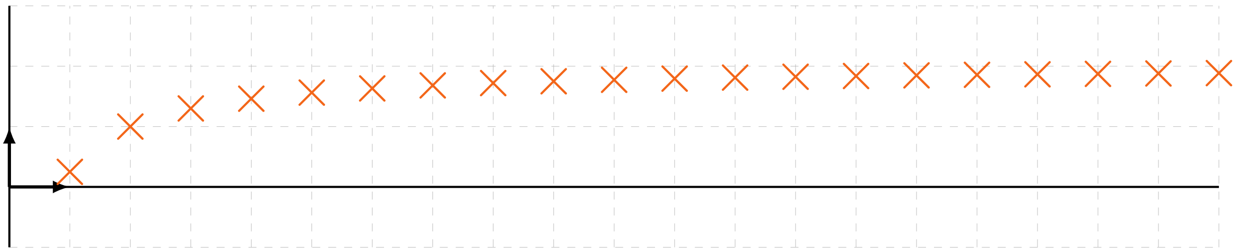


Propriété 3.1 soit a et b deux réels, $a \neq 0$. La suite $\left(\frac{1}{an+b}\right)$ converge vers 0

Définition 3.2 Soit L un réel et (u_n) une suite numérique.
On dit que la suite (u_n) converge vers L si les termes de la suite "se rapprochent de L" lorsque n augmente.

Propriété 3.2 Soit L un réel et (u_n) une suite numérique.
Le suite (u_n) converge vers L si et seulement si la suite $(u_n - L)$ converge vers 0.

■ **Exemple 3.2** On considère la suite (u_n) définie pour tout n par $u_n = \frac{6n-5}{3n+1}$. On représente graphiquement cette suite dans une repère orthonormé.



Il semble que la suite se rapproche de la valeur 2. Notons alors (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 2$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_n - 2 = \frac{6n-5}{3n+1} - 2 = \frac{6n-5}{3n+1} - \frac{6n+2}{3n+1} = \frac{-7}{3n+1}$$

Ainsi, (v_n) converge vers 0, donc (u_n) converge vers 2. ■

3.2 Limite infinie

Définition 3.3 Soit (u_n) une suite numérique.
On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ si u_n devient "aussi grand que l'on veut et le reste" lorsque n augmente.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

■ **Exemple 3.3** On considère la suite (u_n) définie pour tout n par $u_n = n^2$.
$u_0 = 0$, $u_{10} = 100$, $u_{100} = 10000$, $u_{1000} = 1000000$... La suite semble tendre vers $+\infty$.
Prenons en effet $A \in \mathbb{R}+$. Alors, dès que $n \geqslant \sqrt{A}$, on a $u_n = n^2 \geqslant A$, par croissance de la fonction Carré sur $\mathbb{R}+$. ainsi, u_n devient plus grand que n'importe quel nombre, à partir d'un certain rang. ■