Chapitre VII : Applications de la dérivation

1 Variations d'une fonction

Propriété 1.1 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I

■ **Exemple 1.1** On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$, définie sur $\mathbb{R}$.

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est la somme de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $f'(x) = 6x^2 + 18x - 24$.
- Pour connaître les variations de f, on étudie alors le signe de f'. Il s'agit d'une fonction polynômiale du second degré.

On cherche alors les racines de $6x^2 + 18x - 24$. On peut remarquer que 1 est une racine évidente et trouver la deuxième racine, -4, à l'aide des relations coefficients-racines.
Si on ne le remarque pas, on calcule le discriminant

$$\Delta = 18^2 - 4 \times 6 \times (-24) = 324 + 576 = 900 > 0$$

Le discriminant est positif, le polynôme admet deux racines réelles discinctes.

$$x_1 = \frac{-18 - \sqrt{900}}{2 \times 6} = -4$$

et

$$x_2 = \frac{-18 + \sqrt{900}}{2 \times 6} = 1$$

On construit alors le tableau de signes de f' et, grâce à cela, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	$f(-4)$	↘	$f(1)$	↗	

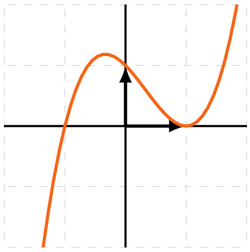
■

2 Extremums

Définition 2.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f admet un minimum local en $a \in I$ s'il existe un réel strictement positif δ tel que, pour tout $x \in]a-\delta; a+\delta[\cap I$, $f(x) \geqslant f(a)$
- On dit que f admet un minimum local en $a \in I$ s'il existe un réel strictement positif δ tel que, pour tout $x \in]a-\delta; a+\delta[\cap I$, $f(x) \leqslant f(a)$

■ **Exemple 2.1** La fonction f dont la représentation graphique dans un repère orthonormé est donné ci-contre admet un maximum local en $-\dfrac{1}{3}$ et un minimum local en 1 ■



Propriété 2.1 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in I$ un point ne se trouvant pas au bord de l'intervalle I. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

R La réciproque est fausse !

■ **Exemple 2.2** Soit f la fonction qui a tout réel x associe $f(x) = x^3$. f est dérivable et, pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2$. On a ainsi $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum local en 0. ■