# Exercices VII : Dérivation - Applications

■ **Exercice 1** (*) On considère la fonction $f : x \mapsto 5x^2 + 2x + 3$.

1. $f$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $f'(x)$ ?
2. Construire le tableau de signes de $f'$.
3. En déduire le tableau de variations de $f$.

■ **Exercice 2** (** - Cas général) On considère trois réels $a$, $b$ et $c$ avec $a \neq 0$, ainsi que la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

1. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x$ un réel, que vaut $f'(x)$ ?
2. Suivant le signe de $a$, construire le tableau de variations de $f$.

■ **Exercice 3** (*) On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 45x + 21$.

1. $f$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $f'(x)$ ?
2. Construire le tableau de signes de $f'$ et en déduire le tableau de variations de $f$.

■ **Exercice 4** (*) On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 + 5x + 4$.

1. $f$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $f'(x)$ ?
2. Construire le tableau de variations de $f$.

■ **Exercice 5** (** - Bac STMG Antilles-Guyane 2015) Une entreprise fabrique des meubles en bois. Elle peut produire au maximum 100 meubles par jour.
Pour $x$ meubles fabriqués et vendus, le coût de production journalier, exprimé en euros, noté $C(x)$, est donné par :

$$C(x) = 2.25x^2 - 6x + 20$$

Chaque meuble est vendu 299 €.

1. On appelle $R(x)$ les recettes de l'entreprise pour $x$ meubles vendus. Expliquer pourquoi $R(x) = 299x$.
2. Montrer que le bénéfice journalier correspondant à la vente de $x$ meubles, c'est-à-dire la quantité $B(x) = R(x) - C(x)$, est donné par

$$B(x) = -2.25x^2 + 305x - 20$$

3. Calculer $B'(x)$
4. En déduire le tableau de variations de $B$ sur $[0;100]$
5. Combien de meubles faut-il produire et vendre pour réaliser un bénéfice maximal ? Que vaut alors ce bénéfice ?

■ **Exercice 6** (*) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{5+x}{1+x}$.

1. Donner le domaine de définition de $f$. $f$ est-elle dérivable sur ce domaine de définition ?
2. Que vaut $f'(x)$ ?
3. Construire le tableau de variations de $f$.
4. L'équation $f(x) = 1$ a-t-elle une solution sur $[0;9]$ ?

■ **Exercice 7** (** - Cas général) Soit $a$, $b$, $c$ et $d$ quatre réels tels que $ad-bc \neq 0$. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Une telle fonction est dite homographique.

1. Donner le domaine de définition $D$ de $f$. $f$ est-elle dérivable sur ce domaine de définition ?
2. Soit $x \in D$. Que vaut $f'(x)$ ?
3. Construire le tableau de variations de $f$ selon le signe de $ad-bc$.
4. Application : Déterminer le domaine de définition et les variations de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x+5}{3x+4}$.

■ **Exercice 8** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2-x}$.

1. Donner le domaine de définition de $f$. $f$ est-elle dérivable sur ce domaine de définition ?
2. Que vaut $f'(x)$ ?
3. Construire le tableau de variations de $f$.

■ **Exercice 9** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+5x+10}{3x}$. On admet que $f$ est définie et dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

1. Soit $x$ un réel. Que vaut $f'(x)$ ?
2. Construire le tableau de variations de $f$.
3. Quels sont les extremums locaux de la fonction $f$ ?

■ **Exercice 10** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$.

1. Donner le domaine de définition de $f$. $f$ est-elle dérivable sur ce domaine de définition ?
2. Construire le tableau de variations de $f$.
3. Quels sont les extremums locaux de la fonction $f$ ?

■ **Exercice 11** (**) L'objectif de cet exercice est de déterminer, à périmètre fixé, le rectangle ayant la plus grande aire possible. Soit $P$ un réel strictement positif. On considère un rectangle $ABCD$ de périmètre $P$. On note $x$ la longueur $AB$.

1. Que vaut la longueur $BC$ ?
2. En déduire l'aire du rectangle $ABCD$ en fonction de $x$ et de $P$.
3. Pour quelle valeur de $x$ cette aire est-elle maximale ? A quel rectangle particulier cette valeur de $x$ correspond-elle ?

■ **Exercice 12** (***) On considère la fonction $f$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4+16x^3-66x^2-360x+120$.

1. Soit $x$ un réel. Que vaut $f'(x)$ ?
2. On note $f''$ la dérivée de $f'$. Que vaut $f''(x)$ ?
3. Construire la tableau de signes de $f''$.
4. En déduire le tableau de variation de $f'$.
5. On indique de plus que $f'(-5) = f'(-3) = f'(-2) = 0$. Construire le tableau de signes de $f'$ et en déduire le tableau de variations de $f$.

■ **Exercice 13** (***) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \geqslant 2$

■ **Exercice 14** (***) Les canettes vendues dans le commerce ont une forme cylindrique. Les plus classiques ont une contenance de 33 centilitres. On se demande alors quelle doit être la hauteur de la canette pour utiliser le moins de surface d'aluminium possible pour la conception de celles-ci.
On fixe un volume de liquide $v$, exprimé en mL. Pour une hauteur $h$, exprimée en cm , la surface d'un cylindre vaut

$$S(h) = 2\left(\frac{v}{h} + \sqrt{\pi h v}\right)$$

1. $S$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner une expression de sa dérivée $S'$.
2. Justifier que, pour tout $h > 0$, $\dfrac{h^2}{\sqrt{h}} = \sqrt{h^3}$.
3. Pour un réel $x$, on note $\sqrt[3]{x}$ sa racine cubique, c'est-à-dire le nombre qui, au cube, donne $x$. Montrer que la fonction $S$ admet un minimum en $h = \sqrt[3]{4\dfrac{v}{\pi}}$.
4. Pour un volume de liquide de 33 cL, quelle hauteur de canette permettrait d'utiliser le moins d'aluminium pour fabriquer l'emballage ?
5. Que peut-on dire du nouveau format des canettes de 33 cL qui ont une hauteur de 145mm, contre 88mm auparavant ?