Exercices : Dérivation

1 Rappels sur la dérivation

▶ **Exercice 1 :** Dériver les fonctions suivantes...

- $f_1 : x \mapsto 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x

$$f_1'(x) = 5 \times 3x^2 + 2 \times 2x - 3 = 15x^2 + 4x - 3$$

- $f_2 : x \mapsto 8x^7 + \dfrac{4}{x^2}$, définie et dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$

Pour tout réel non nul x,

$$f_2'(x) = 8 \times 7x^6 + 4 \times \left(-\frac{2}{x^3}\right) = 56x^6 - \frac{8}{x^3}$$

Remarque : en mettant au même dénominateur, on a $f_2'(x) = \dfrac{56x^9 - 8}{x^3}$.

- $f_3 : x \mapsto 2x^4 + e^{3x-1}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x,

$$f_3'(x) = 2 \times 4x^3 + 3e^{3x-1} = 8x^3 + 3e^{3x-1}$$

- $f_4 : x \mapsto (5x^2 + 2x - 1)e^x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 5x^2 + 2x - 1$ et $v(x) = e^x$
  - u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 10x + 2$
  - v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = e^x$

Ainsi, puisque $f_4 = uv$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_4' = u'v + uv'$. Pour tout réel x, on a donc

$$f_4'(x) = (10x + 2)e^x + (5x^2 + 2x - 1)e^x = (5x^2 + 12x + 1)e^x$$

- $f_5 : x \mapsto (1 - 6x^2)e^{3x+2}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 1 - 6x^2$ et $v(x) = e^x$
- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = -12x$
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = e^x$

Ainsi, puisque $f_5 = uv$, f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$. Pour tout réel x, on a donc

$$f_5'(x) = -12xe^x + (1 - 6x^2)e^x = (-6x^2 - 12x + 1)e^x$$

- $f_6 : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$, définie et dérivable sur sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$

Pour tout réel non nul x, on pose $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$
- u est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, et pour tout réel non nul x, $u'(x) = e^x$
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, et pour tout réel non nul x, $v'(x) = 1$

Ainsi, puisque $f_6 = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ et $f_6' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
Pour tout réel non nul x, on a donc

$$f_6'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

- $f_7 : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x - 5}$, définie et dérivable sur sur $]-\infty; 5[$ et $]5; +\infty[$

Pour tout réel $x \neq 5$, on pose $u(x) = x^2 + 3x + 1$ et $v(x) = x - 5$
- u est dérivable sur $]-\infty; 5[$ et $]5; +\infty[$, et pour tout réel $x \neq 5$, $u'(x) = 2x+3$
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $]-\infty; 5[$ et $]5; +\infty[$, et pour tout réel $x \neq 5$, $v'(x) = 1$

Ainsi, puisque $f = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $]-\infty; 5[$ et $]5; +\infty[$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
Pour tout réel $x \neq 5$, on a donc

$$f_7'(x) = \frac{(2x+3)(x-5) - (x^2 + 3x + 1)}{(x-5)^2} = \frac{2x^2 - 10x + 3x - 15 - x^2 - 3x - 1}{(x-5)^2}$$

c'est-à-dire

$$f_7'(x) = \frac{x^2 - 10x - 16}{(x-5)^2}$$

► **Exercice 2 :** On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 45x + 21$.

1. f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $f'(x)$?

Pour tout réel x

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 45$$

2. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

Notons Δ le discriminant du polynôme $3x^2 + 6x - 45$.

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-45) = 576 > 0$$

Le polynôme $3x^2 + 6x - 45$ possède donc deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{576}}{2 \times 3} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 + \sqrt{576}}{2 \times 3} = 3$$

Par ailleurs, le signe d'un polynôme est celui de son coefficient dominant (ici, 3) à l'extérieur des racines. Il est du signe opposé entre les racines. On peut alors dresser le tableau de signe de f' et en déduire le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	196	$\searrow$	-60	$\nearrow$	

▶ **Exercice 3 :** Pour tout réel $x \neq -1$, on pose $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$

1. Justifier que f est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$ et que pour tout réel x dans ces intervalles

$$f'(x) = \frac{x\, e^x}{(1+x)^2}$$

Pour tout réel $x \neq -1$, on pose $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1 + x$

- u est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$, et pour tout réel $x \neq -1$, $u'(x) = e^x$
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$, et pour tout réel $x \neq -1$, $v'(x) = 1$

Ainsi, puisque $f = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $]-\infty; 5[$ et $]5; +\infty[$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
Pour tout réel $x \neq -1$, on a donc

$$f'(x) = \frac{e^x \times (1+x) - e^x \times 1}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.

Pour tout réel x, $(1+x)^2 \geqslant 0$ et $e^x > 0$. On peut utiliser un tableau de signes.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$(1+x)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

► **Exercice 4 :** Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto (-x^2+x+1)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = -x^2+x+1$ et $v(x) = e^x$

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = -2x+1$
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = e^x$

Ainsi, puisque $f = uv$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$. Pour tout réel x, on a donc

$$f'(x) = (-2x+1)e^x + (-x^2+x+1)e^x = (-x^2-x+2)e^x$$

Pour tout réel x, $e^x > 0$. Il ne reste donc qu'à étudier le signe de $-x^2-x+2$. Il s'agit d'un polynôme du second degré. Son discriminant vaut $\Delta = (-1)^2 * 4 \times (-1) \times 2 = 9 > 0$. Le polynôme $-x^2-x+2$ admet donc deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times(-1)} = -2$$

On peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	$3e^{-2}$	$\nearrow$	e	$\searrow$	

► **Exercice 5 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{10x+4}{5x^2+1}$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer $f'(x)$ pour tout réel x.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 10x + 4$ et $v(x) = 5x^2 + 1$

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $u'(x) = 10$
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $v'(x) = 10x$

Ainsi, puisque $f = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel x, on a donc

$$f'(x) = \frac{10 \times (5x^2+1) - (10x+4) \times 10x}{(5x^2+1)^2} = \frac{-50x^2 - 40x + 10}{(5x^2+1)^2}$$

2. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x, $(5x^2+1)^2 > 0$. Il ne reste qu'à étudier le signe de $-50x^2-40x+10$. C'est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $(-40)^2 - 4 \times 10 \times (-50) = 3600 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles distinctes qui sont

$$x_1 = \frac{-(-40) + \sqrt{3600}}{2 \times (-50)} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-40) - \sqrt{3600}}{2 \times (-50)} = \frac{1}{5} = 0.2$$

On peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		0.2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	5	$\searrow$	

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

La tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 2 a pour équation

$$y = f'(2) \times (x-2) + f(2)$$

Or,

- $f'(2) = \dfrac{-50\times 2^2 - 40\times 2 + 10}{(5\times 2^2+1)^2} = -\dfrac{30}{49}$
- $f(2) = \dfrac{10\times 2 + 4}{5\times 2^2 + 1} = \dfrac{8}{7}$

Ainsi, T a pour équation

$$y = -\frac{30}{49}(x-2) + \frac{8}{7} = -\frac{30}{49}x + \frac{60}{49} + \frac{56}{49} = \frac{30}{49}x + \frac{116}{49}$$

Non, ce n'est pas une belle équation toute jolie, mais c'est volontaire : il ne faut pas avoir peur de mettre les mains dans le cambouis !

▶ **Exercice 6 :** A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geqslant 2$$

Posons $u(x) = \sqrt{x}$ pour tout réel $x > 0$, u est dérivable et ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$. On a alors

- Pour tout réel $x > 0$, $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{\sqrt{x}^2} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

Pour tout réel $x > 0$, on pose alors $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

Pour tout $x > 0$, $x\sqrt{x} > 0$. Le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que de celui de $(x-1)$. On construit alors le tableau de signes de f' et on en déduit le tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

En effet, $f(1) = \sqrt{1} + \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1 + \dfrac{1}{1} = 2$

Ainsi, f admet un minimum en 1, ce minimum vaut 2. Pour tout réel $x > 0$, on a donc $f(x) \geqslant 2$, c'est-à-dire $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \geqslant 2$.

► **Exercice 7 :** A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout réel x, $e^x \geqslant 1 + x$

Pour tout réel x, on pose $f(x) = e^x - x - 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = e^x - 1$. On sait par ailleurs que $e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$. On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On a en effet $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$, soit $e^x - x - 1 \geqslant 0$ ou encore $e^x \geqslant 1 + x$ Graphiquement, cela signifie que la courbe de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de sa tangente en 0.

2 Composition de fonctions

▶ **Exercice 8 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x + 2$ et $h(x) = 2 - x$

1. Donner une expression de $(f \circ g)(x)$ pour tout réel x.
2. Donner une expression de $(g \circ f)(x)$ pour tout réel x.
3. Donner une expression de $(h \circ g)(x)$ pour tout réel x.
4. Donner une expression de $(f \circ g \circ h)(x)$ pour tout réel x.

▶ **Exercice 9 :** Soit f une fonction définie sur un ensemble E. On dit que f est une involution de E si pour tout $x \in E$, $(f \circ f)(x) = x$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$
2. Soit a un réel. Montrer que la fonction $x \mapsto a - x$ est une involution de $\mathbb{R}$
3. Soit a et b deux réels, avec $b \neq 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{b}{x-a} + a$ est une involution de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

▶ **Exercice 10 :** Dériver les fonctions suivantes...

- $f_1 : x \mapsto (3x + 2)^2$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_2 : x \mapsto (6x^2 + 3x + 4)^3$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_3 : x \mapsto \sqrt{e^x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_4 : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 5x + 7}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_5 : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$, définie et dérivable sur $]0; +\infty[$
- $f_6 : x \mapsto e^{x+\frac{1}{x}}$, définie et dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

▶ **Exercice 11 :** On considère la fonction $f : x \mapsto e^{3x^2+2x-1}$, définie sur $\mathbb{R}$

1. Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Construire le tableau de variations de f
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1.

▶ **Exercice 12 :** Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

3 Dérivée seconde

▶ **Exercice 13 :** Dans chacun des cas suivants, donner une expression de la dérivée seconde des fonctions...

- $f_1 : x \mapsto 5x^2 + 2x - 3$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_2 : x \mapsto e^{3x+2}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_4 : x \mapsto (3x^2 + 8)^3$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $f_5 : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 1}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

▶ **Exercice 14 :** On considère la fonction $f : x \mapsto e^{x^2+2x-5}$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Construire le tableau de variation de f
2. Déterminer une expression de $f''(x)$ pour tout réel x.

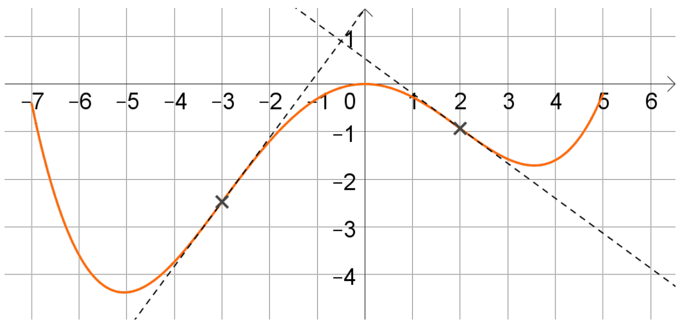
▶ **Exercice 15 :** On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 66x^2 - 360x + 120$.

1. Soit x un réel. Que vaut $f'(x)$?
2. On note f'' la dérivée de f'. Que vaut $f''(x)$?
3. Construire la tableau de signes de f''.
4. En déduire le tableau de variation de f'.
5. On indique de plus que $f'(-5) = f'(-3) = f'(-2) = 0$. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

4 Convexité

▶ **Exercice 16 :** Vrai ou faux ? Une fonction convexe est nécessairement croissante.

▶ **Exercice 17 :** On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé. Les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisse -3 et 2 sont également tracées



1. Quel est le signe de $f'(-6)$? de $f'(4)$?
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe.

▶ **Exercice 18 :** Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ est concave sur $]-\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$.

▶ **Exercice 19 :** Soit a et b deux réels. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est également convexe sur $\mathbb{R}$.

▶ **Exercice 20 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0; +\infty[$.

1. Sur quel domaine f est-elle dérivable ? deux fois dérivable ?
2. Pour tout réel x dans ce domaine, déterminer une expression de $f'(x)$ et de $f''(x)$
3. f est-elle convexe ou concave sur $[0; +\infty[$?
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
5. En déduire que pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}$

▶ **Exercice 21 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

1. Pour tout réel x, déterminer $f''(x)$
2. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.
3. La fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, en quelle abscisse ?

▶ **Exercice 22 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3x + 1$. La fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ?

5 Exercices de synthèse

▶ **Exercice 23 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[2;8]$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[2;8]$, $f'(x) = \dfrac{-10x + 32}{x^3}$
   (b) Etudier le signe de f' sur l'intervalle $[2;8]$.
   (c) En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2;8]$.
2. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[2;8]$, $f''(x) = \dfrac{20x - 96}{x^4}$
   (b) Déterminer sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
   (c) Montrer que le point de $\mathcal{C}_f$ d'absisse $4,8$ est un point d'inflexion de f.

▶ **Exercice 24 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - 2x - 3}{2}\right)^2$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$
3. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $f''(x)$ pour tout réel x.
4. En déduire les intervalles où la fonction f est convexe.
5. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

▶ **Exercice 25 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1$.

1. Construire le tableau de variations de f
2. Etudier la convexité de la fonction f.
3. En utilisant la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2, montrer que pour tout $x > 0$, $x^3 - 2x^2 > 4x - 8$