Dérivation

1 Rappels sur la dérivation

1.1 Fonction dérivée

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et h un réel non nul tel que $a + h \in I$.

- On dit que f est dérivable en a si le taux de variation $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Cette limite est appelée "nombre dérivé de f en a" et est noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$. On appelle alors fonction dérivée de f sur I la fonction

$$f'; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

■ **Exemple 1 :** On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Soit x un réel et h un réel non nul.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

Lorsque h se rapproche de 0, cette quantité tend vers . Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) =$. ■

1.2 Dérivées usuelles

$f : x \mapsto$	Définie sur	Dérivable sur	$f' : x \mapsto$
$mx + p$, m et p réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
x^n pour $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	
$\dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	
$\sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	
e^{ax+b}, a et b réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	

1.3 Opérations sur les dérivées

Théorème 1.1 : Soit I un intervalle, u et v deux fonctions dérivables sur I, k un réel. Alors les fonction $k\,u$, $u+v$, uv sont dérivables. Si de plus, v ne s'annule pas sur I, $\frac{u}{v}$ est également dérivable. On a de plus

$$(k\,u)' = k\,u' \qquad (u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

■ **Exemple 2 :** On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2+1)\exp(x)$, définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \exp(x)$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) =$
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) =$
- Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$

  Pour tout réel x,

  $f'(x) =$

■

1.4 Tangente à la courbe

Définition 2 : Soit f une fonction dérivable en a. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite de coefficient directeur $f'(a)$ et passant par le point de coordonnée $(a; f(a))$.

Propriété 1 : Soit f une fonction dérivable en a. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$$

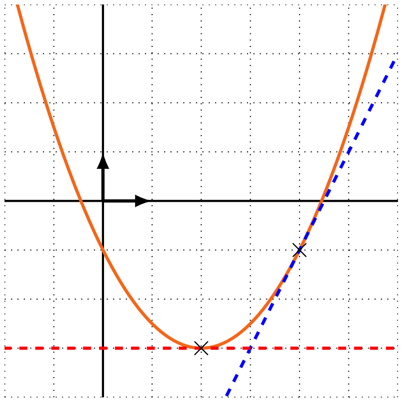
■ **Exemple 3 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x - 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) =$.

- Déterminons l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4
  - $f'(4) =$
  - $f(4) =$
  - Cette tangente a pour équation

    $$y = f'(4) \times (x-4) + f(4) =$$
- Déterminons l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2
  - $f'(2) =$: la tangente est
  - $f(2) =$
  - Cette tangente a pour équation

    $$y =$$

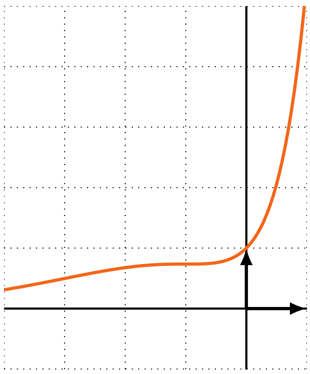
■



1.5 Variations d'une fonction

Propriété 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I

■ **Exemple 4 :** On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2 + 1)\exp(x)$ étudiée précédemment. On a vu que pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)^2 \exp(x)$. Or, pour tout réel x, $(x+1)^2 \geqslant 0$ et $\exp(x) \geqslant 0$ (on rappelle que l'exponentielle est toujours positive). Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 0$: f est croissante sur $\mathbb{R}$. ■



2 Composition de fonctions

Définition 3 : Soit I et J deux parties de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur J et g une fonction définie sur I telle que pour tout réel x, $g(x) \in J$.

On définit la fonction composée de f et g notée $f \circ g$ par

$$\text{Pour tout } x \in I,\ f \circ g(x) = f(g(x))$$

■ **Exemple 5 :** Pour tout réel x, on note $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 3$. Alors, pour tout réel x,

- $f \circ g(x) = f(g(x)) =$
- $g \circ f(x) = g(f(x)) =$

■

Propriété 3 : Soit I et J deux intervalles, f une fonction définie et dérivable sur J et g une fonction définie et dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $g(x) \in J$. Alors $f \circ g$ est dérivable et pour tout réel x dans I,

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times (f' \circ g)(x)$$

■ **Exemple 6 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{x^2+3x-2}$. Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = e^x$ et $v(x) = x^2 + 3x - 2$. On a alors $f(x) = u(v(x)) = u \circ v(x)$.

- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) =$
- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) =$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) =$$

■

Propriété 4 — Cas particuliers. : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

- Pour tout entier naturel n, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u' \times e^u$.
- Si pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
- Si pour tout réel x, $u(x) \neq 0$, $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\dfrac{u'}{u^2}$.

■ **Exemple 7 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = (4x + 1)^9$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$f'(x) =$$

■

■ **Exemple 8 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. On a bien $x^2 + 1 \neq 0$ pour tout réel x. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) =$$

■

3 Dérivée seconde

Définition 4 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa fonction dérivée f' est également dérivable sur I (on dit également que f est deux fois dérivable sur I). On appelle fonction dérivée seconde de f la fonction dérivée de f'. Cette fonction est notée f''.

$$\text{Pour tout } x \in I\ f''(x) = (f')'(x)$$

■ **Exemple 9 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = (2x+1)e^{3x-2}$. Posons, pour tout réel x, $u_1(x) = 2x+1$ et $v_1(x) = e^{3x-2}$

- u_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_1'(x) =$
- v_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v_1'(x) =$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = u_1'(x) \times v_1(x) + u_1(x) \times v_1'(x) =$$

Posons alors, pour tout réel x, $u_2(x) = 6x+5$ et $v_2(x) = e^{3x-2}$

- u_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_2'(x) =$
- v_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v_2'(x) =$.

Ainsi, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f''(x) = u_2'(x) \times v_2(x) + u_2(x) \times v_2'(x) =$$

■

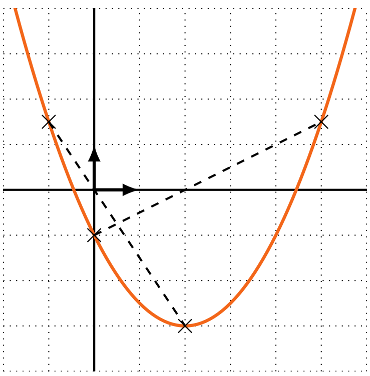
4 Convexité

4.1 Convexité, concavité

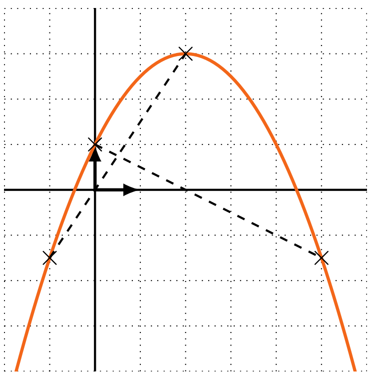
Définition 5 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- On dit que f est convexe sur I si tout segment reliant deux points de la courbe se trouve au-dessus de la courbe
- On dit que f est concave sur I si tout segment reliant deux points de la courbe se trouve en-dessous de la courbe

Fonction convexe



Fonction concave



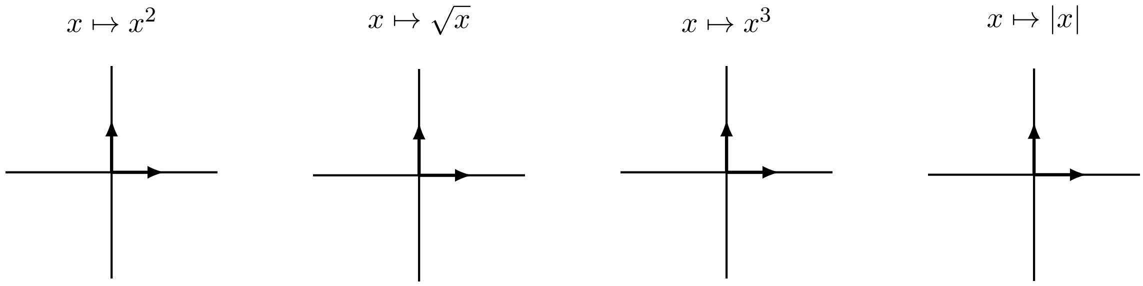
■ **Exemple 10 :** La fonction $x \mapsto x^2$ est sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction $x \mapsto x^3$ est sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction $x \mapsto |x|$ est sur $\mathbb{R}$. ■

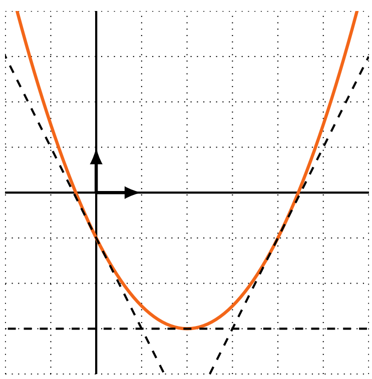
Rappel des courbes représentatives



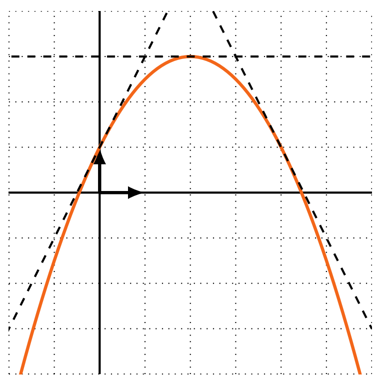
Propriété 5 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- On dit que f est convexe sur I si la courbe $\mathcal{C}_f$ se trouve au-dessus de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.
- On dit que f est concave sur I si la courbe $\mathcal{C}_f$ se trouve en-dessous de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.

Fonction convexe



Fonction concave



Propriété 6 : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$
- f est concave sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$

Démonstration 4.1 : **Si $f'' \geqslant 0$, alors f est convexe** : Soit f une fonction deux fois dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.

Soit $a \in I$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Pour tout $x \in I$, posons alors $g(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$. Déterminer la position de la tangente par rapport à la courbe de g, c'est chercher le signe de g.

g est deux fois dérivable sur I, et pour tout $x \in I$

- $g'(x) = f'(x) - f'(a)$
- $g''(x) = f''(x)$

Ainsi, puisque pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$, on a aussi $g''(x) \geqslant 0$. g' est donc croissante sur I. Or, $g'(a) = 0$.

- Soit $x \in I$ tel que $x < a$.
  - Par croissance de g' sur I, on a alors $g'(x) \leqslant g'(a)$ c'est-à-dire $g'(x) \leqslant 0$.
  - g est donc décroissante sur $]-\infty; a] \cap I$.
  - On a donc $g(x) \geqslant g(a)$.
  - Or, $g(a) = f(a) - f'(a) \times (a - a) - f(a) = 0$. Ainsi, $g(x) \geqslant 0$
- Soit $x \in I$ tel que $x > a$
  - Par croissance de g' sur I, on a alors $g'(x) \geqslant g'(a)$ c'est-à-dire $g'(x) \geqslant 0$.
  - g est donc croissante sur $[a; +\infty[\cap I$.
  - On a donc $g(x) \geqslant g(a)$.
  - Or, $g(a) = f(a) - f'(a) \times (a - a) - f(a) = 0$. Ainsi, $g(x) \geqslant 0$

Finalement, pour tout $x \in I$, $g(x) \geqslant 0$, ce qui signifie que le courbe de f est au-dessus de la tangente à cette courbe au point d'abscisse a. □

■ **Exemple 11 :** Pour tout entier naturel pair n, la fonction $x \mapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$. ■

■ **Exemple 12 :** La fonction $f : x \mapsto x^3$ est concave sur $]-\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$.

En effet, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f''(x) = 6x$, qui est positif si et seulement si x l'est aussi. ■

■ **Exemple 13 :** On considère la fonction $f : x \mapsto e^x$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f''(x) =$ qui est

Ainsi, la fonction f est convexe et est au-dessus de ses tangents. Or, la tangente à la courbe de f en 0 a pour équation

$$y =$$

Ainsi, pour tout réel x, on a l'inégalité

$$e^x \geqslant$$

■

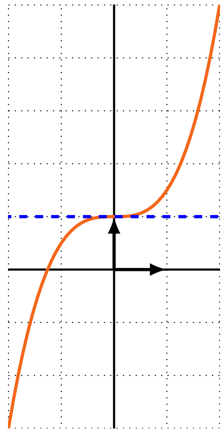
4.2 Point d'inflexion

Définition 6 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Un point d'inflexion est un point où la convexité de la fonction f change. La tangente à la courbe de f en un point d'inflexion traverse la courbe de f.

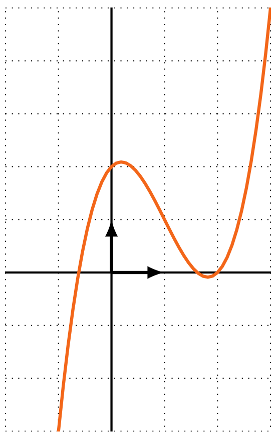
■ **Exemple 14 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{x^3}{2} + 1$.
La fonction f est deux fois dérivable et pour tout réel x, $f''(x) = 3x$.

- Lorsque $x < 0$, $f''(x) < 0$, la fonction est concave, la courbe est sous ses tangentes.
- Lorsque $x > 0$, $f''(x) > 0$, la fonction est convexe, la courbe est au-dessus de ses tangentes.

■



■ **Exemple 15 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$. La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



La fonction f est deux fois dérivable et pour tout réel x,

$f''(x) =$

■