Rappels : Etude de signe

1 Signe d'une fonction polynomiale du second degré

Propriété 1 : On considère trois réels a, b et c avec $a \neq 0$. Pour tout réel x, on pose $f(x) = ax^2 + bx + c$ et on note Δ le discriminant du polynôme $a^2 + bx + c$

- Si $\Delta < 0$, alors pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a et n'est jamais nul.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, alors pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a et s'annule uniquement en $-\dfrac{b}{2a}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta > 0$, notons x_1 et x_2 les racines de $ax_2 + bx + c$, en supposant que x_1 est la plus petite des deux. Alors $f(x)$ est du signe de a sauf entre les racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

■ **Exemple 1 :** Soit $f : x \mapsto -4x^2 + 12x - 8$, définie sur $\mathbb{R}$.
Calculons le discriminant du polynôme $-4x^2 + 12x - 8$

$$\Delta = 12^2 - 4 \times (-4) \times (-8) = 144 - 128 = 16 > 0$$

Le polynôme possède donc deux racines

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 - \sqrt{16}}{2 \times (-4)} = \frac{-12 - 4}{-8} = 2$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 + \sqrt{16}}{2 \times (-4)} = \frac{-12 + 4}{-8} = 1$$

On en déduit le tableau de signes de $-4x^2+12x-8$, le coefficient -4 étant strictement négatif

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, si l'on veut résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$, on recherche le signe $-$ dans ce tableau. Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ sont ainsi $S =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$.

■

■ **Exercice 1 :** Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$

$x^2 - 5x + 6 > 0$ $\qquad$ $-5x^2 + 6x - 1 \geqslant 0$

2 Signes évidents et tableau de signes

Propriété 2 : Il est important de repérer les expressions dont on connaît déjà le signe, sans avoir à faire d'étude supplémentaire.

- Pour tout réel x, $e^x > 0$
- Pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} > 0$
- Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$. Plus généralement, pour tout réel x et tout entier pair n, $x^n \geqslant 0$.

■ **Exemple 2 :** Pour tout réel x différent de $-\frac{2}{5}$, on souhaite déterminer le signe de

$$f(x) = \frac{(2x^2+3x+1)e^{3x+1}}{(5x+2)^2}$$

On sait que pour tout réel x, $e^{3x+1} > 0$. De même, pour tout réel x, $(5x+2)^2 \geqslant 0$. Cette quantité s'annule toutefois pour $x = -\frac{2}{5}$: ce sera une valeur interdite pour notre fonction. Il ne nous reste plus qu'à étudier le signe de $2x^2 + 3x + 1$

C'est un polynôme du second degré. Son discriminant Δ vaut $3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0$. Ce polynôme possède donc deux racines qui sont

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{1}}{2\times 2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{1}}{2\times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

On peut alors construire le signe de toute l'expression en utilisant un tableau de signes.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
e^{3x+1}		$+$		$+$		$+$		$+$	
$(5x+2)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x^2+3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

On n'oublie pas qu'un zéro du dénominateur correspond à une valeur interdite.

■ **Exercice 2 :** Construire le tableau de signes de la fonction f définie pour tout réel x différent de $\dfrac{2}{3}$ par

$$f(x) = \frac{(x^2+4x-12)(x+1)^2 e^{5x+2}}{(3x-2)^4}$$

■