Exercices : Dérivation

1 Rappels sur la dérivation

■ **Exercice 1 :** Dériver les fonctions suivantes...

- $f_1 : x \mapsto 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_2 : x \mapsto 8x^7 + \dfrac{4}{x^2}$, définie et dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$
- $f_3 : x \mapsto 2x^4 + e^{3x-1}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_4 : x \mapsto (5x^2 + 2x - 1)e^x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_5 : x \mapsto (1 - 6x^2)e^{3x+2}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_6 : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$, définie et dérivable sur sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$
- $f_7 : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x - 5}$, définie et dérivable sur sur $]-\infty; 5[$ et $]5; +\infty[$

■ **Exercice 2 :** On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 45x + 21$.

1. f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $f'(x)$?
2. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

■ **Exercice 3 :** Pour tout réel $x \neq -11$, on pose $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + x}$

1. Justifier que f est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$ et que pour tout réel x dans ces intervalles
$$f'(x) = \frac{x\,e^x}{(1 + x)^2}$$
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.

■ **Exercice 4 :** Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto (-x^2 + x + 1)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

■ **Exercice 5 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{10x + 4}{5x^2 + 1}$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

■ **Exercice 6 :** A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout réel $x > 0$,
$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geqslant 2$$

■ **Exercice 7 :** A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout réel x, $e^x \geqslant 1 + x$

2 Composition de fonctions

■ **Exercice 8 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x + 2$ et $h(x) = 2 - x$

1. Donner une expression de $(f \circ g)(x)$ pour tout réel x.
2. Donner une expression de $(g \circ f)(x)$ pour tout réel x.
3. Donner une expression de $(h \circ g)(x)$ pour tout réel x.
4. Donner une expression de $(f \circ g \circ h)(x)$ pour tout réel x.

■ **Exercice 9 :** Soit f une fonction définie sur un ensemble E. On dit que f est une involution de E si pour tout $x \in E$, $(f \circ f)(x) = x$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$
2. Soit a un réel. Montrer que la fonction $x \mapsto a - x$ est une involution de $\mathbb{R}$
3. Soit a et b deux réels, avec $b \neq 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{b}{x - a} + a$ est une involution de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

■ **Exercice 10 :** Dériver les fonctions suivantes...

- $f_1 : x \mapsto (3x + 2)^2$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_2 : x \mapsto (6x^2 + 3x + 4)^3$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_3 : x \mapsto \sqrt{e^x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_4 : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 5x + 7}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_5 : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$, définie et dérivable sur $]0; +\infty[$
- $f_6 : x \mapsto e^{x + \frac{1}{x}}$, définie et dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

■ **Exercice 11 :** On considère la fonction $f : x \mapsto e^{3x^2 + 2x - 1}$, définie sur $\mathbb{R}$

1. Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Construire le tableau de variations de f
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1.

■ **Exercice 12 :** Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

3 Dérivée seconde

■ **Exercice 13 :** Dans chacun des cas suivants, donner une expression de la dérivée seconde des fonctions...

- $f_1 : x \mapsto 5x^2 + 2x - 3$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_2 : x \mapsto e^{3x+2}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 1}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f_4 : x \mapsto (3x^2 + 8)^3$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $f_5 : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 1}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

■ **Exercice 14 :** On considère la fonction $f : x \mapsto e^{x^2+2x-5}$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Construire le tableau de variation de f
2. Déterminer une expression de $f''(x)$ pour tout réel x.

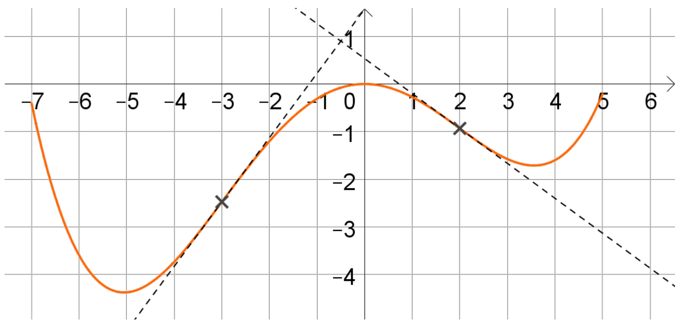
■ **Exercice 15 :** On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 66x^2 - 360x + 120$.

1. Soit x un réel. Que vaut $f'(x)$?
2. On note f'' la dérivée de f'. Que vaut $f''(x)$?
3. Construire la tableau de signes de f''.
4. En déduire le tableau de variation de f'.
5. On indique de plus que $f'(-5) = f'(-3) = f'(-2) = 0$. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

4 Convexité

■ **Exercice 16 :** Vrai ou faux ? Une fonction convexe est nécessairement croissante.

■ **Exercice 17 :** On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé. Les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisse -3 et 2 sont également tracées



1. Quel est le signe de $f'(-6)$? de $f'(4)$?
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe.

■ **Exercice 18 :** Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$.

■ **Exercice 19 :** Soit a et b deux réels. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est également convexe sur $\mathbb{R}$.

■ **Exercice 20 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0;+\infty[$.

1. Sur quel domaine f est-elle dérivable ? deux fois dérivable ?
2. Pour tout réel x dans ce domaine, déterminer une expression de $f'(x)$ et de $f''(x)$
3. f est-elle convexe ou concave sur $[0;+\infty[$?
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
5. En déduire que pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}$

■ **Exercice 21 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

1. Pour tout réel x, déterminer $f''(x)$
2. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.
3. La fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, en quelle abscisse ?

■ **Exercice 22 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3x + 1$. La fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ?

5 Exercices de synthèse

■ **Exercice 23 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[2; 8]$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[2; 8]$, $f'(x) = \dfrac{-10x + 32}{x^3}$
   (b) Etudier le signe de f' sur l'intervalle $[2; 8]$.
   (c) En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2; 8]$.
2. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[2; 8]$, $f''(x) = \dfrac{20x - 96}{x^4}$
   (b) Déterminer sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
   (c) Montrer que le point de $\mathcal{C}_f$ d'absisse $4,8$ est un point d'inflexion de f.

■ **Exercice 24 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - 2x - 3}{2}\right)^2$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$
3. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $f''(x)$ pour tout réel x.
4. En déduire les intervalles où la fonction f est convexe.
5. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

■ **Exercice 25 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1$.

1. Construire le tableau de variations de f
2. Etudier la convexité de la fonction f.
3. En utilisant la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2, montrer que pour tout $x > 0$, $x^3 - 2x^2 > 4x - 8$