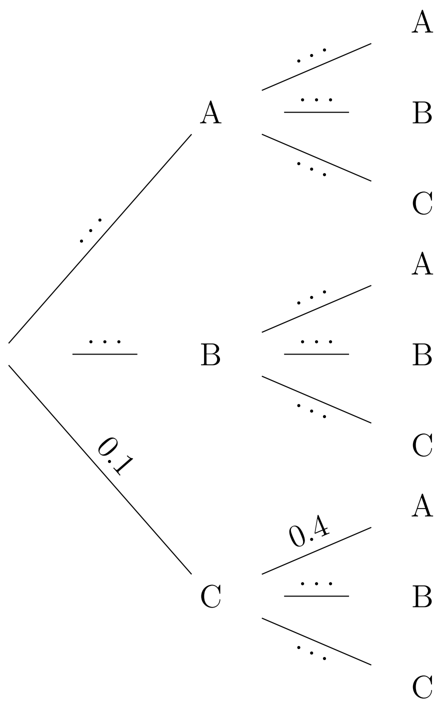
Exercices : Succession d'épreuves

1 Répétition d'épreuves indépendantes

▶ **Exercice 1 :** On lance 3 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres pairs ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 au premier lancer mais de ne pas en obtenir au deuxième et troisième lancer ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir trois fois de suite le même nombre ?

▶ **Exercice 2 :** Une expérience aléatoire est répétée deux fois. Ces deux expériences sont supposées indépendantes. L'expérience est modélisée par l'arbre de probabilités ci-dessous.



1. Compléter cet arbre de probabilités
2. Quelle est la probabilité de l'issue $(A; A)$?
3. Quelle est la probabilité de l'événement "les deux expériences aboutissent au même résultat" ?
4. Quelle est la probabilité de l'événement "les deux expériences aboutissent à des résultats différents" ?
5. L'expérience est désormais faite trois fois de suite
   (a) Quelle est la probabilité de l'issue $(A; B; C)$?
   (b) Quelle est la probabilité de l'événement "les trois expériences aboutissent au même résultat" ?
   (c) Quelle est la probabilité de l'événement "les trois expériences aboutissent à trois résultats différents" ?

► **Exercice 3 :** Dix cartes sont placées sur la table, faces cachées : 2 piques, 4 carreaux et 4 trèfles. On sélectionne une carte au hasard, de manière uniforme. La carte est alors dévoilée et on note sa couleur. Puis elle est retournée et les cartes sont mélangées. On tire alors une autre carte et on regarde sa couleur. On notera P, C et T lorsque la carte choisie est respectivement un pique, un carreau ou un trèfle.

1. Construire l'arbre de probabilité de cette expérience. Combien a-t-on d'issues ?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux trèfles ?
3. Quelle est la probabilité de tirer un pique puis un carreau ?
4. Quelle est la probabilité de ne pas tirer de trèfle ?
5. Quelle est la probabilité de tirer deux cartes de la même couleur ?
6. Combien aurait-on d'issues si on réalisait l'expérience 3 fois de suite ? n fois de suite ?
7. Quelle est la probabilité, si l'on fait l'expérience 3 fois de suite, de tirer successivement un carreau, puis un trèfle, puis un carreau ?

► **Exercice 4 :** Une urne renferme deux boules rouges, trois boules bleues et cinq boules jaunes indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise trois boules dans l'urne

1. Quelle hypothèse permet d'affirmer que les tirages sont indépendants ?
2. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules jaunes ?
3. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge puis deux boules bleues ?
4. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules de couleur différente ?

2 Epreuve de Bernoulli

► **Exercice 5 :** Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,3$. Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

► **Exercice 6 :** Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli telle que $Var(X) = 0,09$. Quelles sont les valeurs possibles du paramètres p ?

► **Exercice 7 :** Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour quelle valeur de p la variance de X est-elle maximale ?

3 Loi binomiale

► **Exercice 8 :** Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X dans chacun des cas suivants ? On précisera les paramètres.

1. On lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. X est la variable aléatoire qui vaut 1 si la face est un multiple de 3, 0 sinon
2. On lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de 4 obtenus en 7 lancers.
3. On tire trois cartes dans un paquet de 52 cartes, la carte tirée étant remise dans le paquet entre temps. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de cartes rouges tirées.

4. On tire trois cartes dans un paquet de 52 cartes, la carte tirée étant remise dans le paquet entre temps. X est la variable aléatoire qui vaut 1 si les trois cartes sont rouges et qui vaut 0 sinon.

▶ **Exercice 9 :** Dans chacun des cas suivants, donner la loi de la variable aléatoire X.

1. (Réunion 2008) Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à $0,1$. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.
2. (France Métropolitaine 2014) Un restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à $0,8$. On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.
3. (Pondichéry 2013) Une entreprise emploie 220 salariés. On admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant une période d'épidémie est égale à $p = 0,05$. On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues. On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.
4. A chacun de ses tirs, un tireur à l'arc atteint la cible avec une probabilité de 0,7. On admet que les résultats précédents n'influencent pas ses tirs suivants. On appelle X le nombre de tirs hors cible en 20 tentatives.

▶ **Exercice 10 :** Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}\left(5; \frac{1}{3}\right)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$
2. Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant 4)$
3. Calculer $\mathbb{P}(X < 3)$

▶ **Exercice 11 :** Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}\left(4; \frac{1}{4}\right)$

1. Construire le tableau résumant la loi de X.
2. A partir de ce tableau, calculer l'espérance de X.
3. Conjecturer l'expression de l'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et p.

▶ **Exercice 12 :** On lance 4 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6.

1. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 3 obtenus. Que valent $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X \leqslant 3)$.
2. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir de 5 ni de 6 sur l'ensemble des lancers ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux fois le nombre 4 ?

▶ **Exercice 13 :** On lance quatre fois une pièce équilibrée et on regarde sur quel côté elle tombe.

1. Quel est la probabilité de ne tomber aucune fois sur PILE ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 PILE ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus 2 PILE ?

4 Exercices de synthèse

► **Exercice 14 :** On dispose d'un jeu de 32 cartes. Pour rappel, les cartes d'un tel jeu ont une couleur (Coeur, Pique, Carreau, Trèfle) et une valeur (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7). Une personne tire alors une carte, la regarde, puis la remet dans le paquet un certain nombre de fois. Déterminer les probabilités suivantes.

1. En deux tirages, la probabilité d'obtenir un roi puis un coeur ;
2. En deux tirages, la probabilité de tirer deux cartes différentes ;
3. En trois tirages, la probabilité de tirer trois cartes différentes ;
4. La probabilité de tirer exactement 3 coeurs en 4 tirages ;
5. La probabilité de tirer au moins 2 piques en 5 tirages.

► **Exercice 15 :** Une entreprise produit des composants électroniques, dont on estime que 5% d'entre eux sont défectueux. On prélève 10 composants parmi le stock. On suppose que le stock est assez grand pour que cette sélection soit assimilée à un tirage avec remise dans le stock. On note X le nombre de composants défectueux ainsi piochés.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
2. Quelle est la probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse ?
3. Que vaut $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

► **Exercice 16 :** Bac S - Antilles Guyane 2016

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65% de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8% des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5% des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

- A : " l'ampoule provient de la machine A " ;
- B : " l'ampoule provient de la machine B " ;
- D : " l'ampoule présente un défaut ".

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
   (a) Construire un arbre pondéré représentant la situation.
   (b) Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à $0,9305$.
   (c) L'ampoule tirée est sans défaut. Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.
2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.