Exercices : Suites et récurrence

1 Démonstration par récurrence

▸ **Exercice 1 :** Soit r un réel. On rappelle qu'une suite (u_n) est arithmétique de raison r si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + rn$.
2. **Application :** On considère la suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 8$
   (a) Exprimer u_n en fonction de n
   (b) Calculer u_{18} à l'aide de cette formule.

▸ **Exercice 2 :** Soit q un réel. On rappelle qu'une suite (u_n) est géométrique de raison q si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.
2. **Application :** On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = -2$
   (a) Exprimer u_n en fonction de n
   (b) Calculer u_{12} à l'aide de cette formule.

▸ **Exercice 3 :** On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 8$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 4 + 8 \times 3^n$.

▸ **Exercice 4 :** Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. Montrer que $\mathcal{P}(1)$ est vraie
2. Soit n un entier naturel non nul tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   (a) Ecrire $\mathcal{P}(n+1)$
   (b) En partant de la proposition $\mathcal{P}(n)$, montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
3. Conclure à l'aide du principe de récurrence.

▸ **Exercice 5 :** On considère les suites (x_n) et (y_n) définies comme suit

$$\begin{cases} x_0 = -4 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 0.8x_n - 0.6y_n \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0 = 3 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = 0.6x_n + 0.8y_n \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $x_n^2 + y_n^2 = 25$. Interpréter géométriquement cette propriété.

▸ **Exercice 6 :** On rappelle que pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$, définie sur $\mathbb{R}$, est également dérivable, de dérivée $f_n' : x \mapsto n\,x^{n-1}$

1. Soit u et v deux fonctions dérivables. Rappeler la formule de la dérivée de uv.
2. Rappeler les dérivées des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$
3. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathcal{P}(n)$ la proposition "pour tout réel x, $f_n'(x) = n\,x^{n-1}$". Démontrer cette proposition par récurrence.

▶ **Exercice 7 :** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$$

▶ **Exercice 8 :** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, 10^n-1 est un multiple de 9.

2 Suites majorées, minorées, bornées

▶ **Exercice 9 :** Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite (u_n) est majorée, minorée, bornée.

$u_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n}$ pour $n\neq 0$ $\quad u_n=\cos(n)+\sin(n)$ $\quad u_n=-3\cos(n)+2\sin(n)$

$u_n=2\cos(n)-n$ $\quad u_n=\cos(n)+3$ $\quad u_n=(-1)^n\sin(n)+3\cos(n)$

$u_n=\dfrac{n}{n+1}$ $\quad u_n=\dfrac{\cos(n)}{n+1}$ $\quad u_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+2n^2$

▶ **Exercice 10 :** Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=\dfrac{4n+7}{2n-5}$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n-2=\dfrac{17}{2n-5}$
2. En déduire que la suite (u_n) est minorée et donner un minorant.

▶ **Exercice 11 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{2}{10}\,u_n+8$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant 10$.

▶ **Exercice 12 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+3}{2}$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3\leqslant u_n\leqslant 5$

▶ **Exercice 13 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier relatif n, $u_{n+1}=\dfrac{1}{1+u_n}$. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $\dfrac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant 1$.

▶ **Exercice 14 :** On considère la suite (v_n) définie par $v_0=0.3$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=4v_n-4v_n^2$.

1. Pour tout réel $x\in[0;1]$, on pose $f(x)=4x-4x^2$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $f'(x)$ pour tout réel $x\in[0;1]$
2. Étudier le signe de $f'(x)$
3. En déduire les variations de f et en déduire que pour tout réel x, $0\leqslant f(x)\leqslant 1$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0\leqslant v_n\leqslant 1$.

3 Suites croissantes, suites décroissantes

▶ **Exercice 15 :** On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 - 24n + 3$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 4n - 22$
2. En déduire le sens de variations de la suite (u_n).

▶ **Exercice 16 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 8$
2. Montrer que pour entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 4$
3. Déduire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est croissante.

▶ **Exercice 17 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 7$. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant -21$ et que la suite (u_n) est décroissante.

▶ **Exercice 18 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$ et que (u_n) est décroissante.

4 Exercices de synthèse

▶ **Exercice 19 :** Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, le démontrer. Sinon, donner un contre-exemple.

1. Toute suite décroissante à partir d'un certain rang est majorée
2. Si une suite est strictement croissante, alors cette suite n'est pas majorée
3. Si une suite n'est pas majorée, alors elle est croissante
4. Si une suite n'est pas minorée, alors elle ne peut pas être croissante.

▶ **Exercice 20 :** On considère la suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{u_n}$.

1. Que se passe-t-il si $u_0 = 1$?
2. Trouver une autre valeur de u_0 pour laquelle la suite est constante.
3. On suppose que $u_0 \in]1; 2[$
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
4. On suppose que $u_0 > 2$. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$ et que la suite (u_n) est décroissante.
5. On suppose que $0 < u_0 < 1$.
   (a) Montrer que $u_2 > 2$
   (b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 2.