Exercices : Combinatoire

1 Cardinal d'ensembles

► **Exercice 1 :** On considère l'ensemble $A = \{5; 9; 13\}$. Déterminer l'ensemble B, disjoint de A, tel que $A \cup B = \{1; 2; 5; 8; 9; 13; 14\}$.

► **Exercice 2 :** On considère deux ensembles A et B

- Si $\text{Card}(A) = 18$, $\text{Card}(B) = 23$, A et B étant disjoints, que vaut $\text{Card}(A \cup B)$?
- Si $\text{Card}(A) = 12$, $\text{Card}(B) = 47$ et $\text{Card}(A \cup B) = 58$, les ensembles A et B sont-ils disjoints ?
- Si $\text{Card}(A) = 14$ et $\text{Card}(A \cup B) = 27$, quel est le nombre minimal d'éléments dans l'ensemble B ?

► **Exercice 3 :** Pour tout entier naturel n, on note A_n l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - n = 0$. Déterminer $\text{Card}(A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$.

► **Exercice 4 :** On considère les ensembles $A = \{5; 9\}$ et $B = \{2; 4; 6\}$. Donner les éléments de $A \times B$, $B \times A$ et A^2.

► **Exercice 5 :** On considère les ensembles $A = \{1; 5; 7; 9\}$, $B = \{3; 8; 14\}$ et $C = \{1; 2; 3\}$, donner un élément de $A \times C \times B$, de $B \times A \times C$, de A^4 et de C^7.

► **Exercice 6 :** On considère trois ensembles $A = \{1; 3; 4; 5\}$, $B = \{2; 8; 6\}$ et $C = \{4; 2\}$. Donner $\text{Card}(A \times B)$, $\text{Card}(A \times C \times B)$, $\text{Card}(A^3)$, $\text{Card}(B^5)$, $\text{Card}(B \times C^2)$ et $\text{Card}(A^2 \times B^3 \times C^4)$.

► **Exercice 7 :** Soit A et B deux ensembles finis tels que $\text{Card}(A \times B) = 299$ et $\text{Card}(A \cup B) = 37$. Les ensembles A et B sont-ils disjoints ?

► **Exercice 8 :** Un restaurant propose 5 entrées différentes, 4 plats et 6 desserts. Combien de menus Entrée-Plat-Dessert différents peut-on composer ? Combien de menus Entrée-Plat peut-on composer ?

► **Exercice 9 :** Pour accéder à ses données bancaires, en plus de son identifiant, l'usager d'une banque doit utiliser un code personnel. Dans certaines banques, il s'agit d'un nombre composé de 4 à 8 chiffres, chaque chiffre étant compris entre 0 et 9. Un même chiffre peut être utilisé plusieurs fois. Combien de codes personnels différents existe-t-il ?

► **Exercice 10 :** Parmi tous les nombres de 1 à 1000, combien s'écrivent avec le chiffre 9 ?

► **Exercice 11 :** En informatique, un octet est une succession de 8 bits, chaque bit ne pouvant prendre que deux valeurs : 0 ou 1. Un octet est donc un 8-uplet de $\{0; 1\}$

1. Combien d'octets différents existe-t-il ?
2. Dans le système RGB, une couleur est codée à l'aide de 3 octets désignant respectivement les niveaux de rouge, de vert et de bleu. Combien de couleurs différentes est-il ainsi possible de coder ?

2 Arrangements et permutations

▶ **Exercice 12 :** On considère l'ensemble $A = \{1; 3; 7; 11\}$. Donner tous les 2-arrangements de A. Combien y en a-t-il ?

▶ **Exercice 13 :** On considère l'ensemble $A = \{c; o; s\}$ Donner toutes les permutations de A. Combien y en a-t-il ?

▶ **Exercice 14 :** On considère l'ensemble $A = \{1; 3; 7; 9; 11\}$.

1. Donner deux éléments de A^3. Combien en existe-t-il ?
2. Donner deux 3-arrangements d'éléments de A. Combien en existe-t-il ?
3. Donner deux permutations de A. Combien en existe-t-il ?

▶ **Exercice 15 :** Deux groupes d'étudiants se rendent au cinéma. Le premier est composé de 6 personnes et le deuxième de 4 personnes. Les étudiants s'installent sur une rangée de dix places.

1. Combien de configurations différentes existe-t-il ?
2. Les deux groupes ne veulent pas être séparés. Combien de configurations sont possibles ?

▶ **Exercice 16 :** On dispose des lettres de SAINTEX. On souhaite construire de nouveaux mots à l'aide de ces lettres, sans s'intéresser au sens de ces mots. On peut par exemple former les mots EXTIA ou SINETAX.

1. Combien de mots de 4 lettres peut-on former si toutes les lettres peuvent être utilisées autant de fois que l'on veut ?
2. Combien de mots de 4 lettres peut-on former si chaque lettre ne peut être utilisée qu'une seule fois ?
3. Combien de mots de 6 lettres ne commençant pas par la lettre X peut-on former, chaque lettre pouvant être utilisée autant de fois que l'on veut ?
4. Combien de mots de 4 lettres comportant la lettre I existe-t-il, chaque lettre ne pouvant être utilisée qu'une seule fois ?

▶ **Exercice 17 : Bac S - Amérique du Sud, novembre 2009**

On considère un questionnaire comportant cinq questions. Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres. Par exemple, le mot BBAAC signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. Combien y-a-t'il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?
2. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - E : " le candidat a exactement une réponse exacte ".
   - F : " le candidat n'a aucune réponse exacte ".
   - G : " le mot-réponse du candidat est un palindrome " (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, BACAB est un palindrome).

3 Combinaisons d'un ensemble fini

▶ **Exercice 18 :** On considère l'ensemble $A = \{1; 2; 3; 4\}$. donner toutes les parties de A à 2 éléments et en déduire la valeur de $\binom{4}{2}$.

▶ **Exercice 19 :** Donner les valeurs de $\binom{5}{3}$, $\binom{7}{5}$, $\binom{10}{7}$, $\binom{8}{4}$, $\binom{10}{4}$ et $\binom{7}{3}$.

▶ **Exercice 20 :** Calculer les coefficients binomiaux : $\binom{51}{2}$, $\binom{1475}{1474}$, $\binom{1321}{0}$, $\binom{26}{24}$

▶ **Exercice 21 :** Que vaut $\binom{9}{0} - \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \ldots + \binom{9}{8} - \binom{9}{9} = \sum_{k=0}^{9} (-1)^k \binom{9}{k}$?

▶ **Exercice 22 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \binom{2n}{n}$. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

▶ **Exercice 23 :** Pour préparer le prochain devoir de mathématiques, le professeur donne une liste de dix exercices et vous recommande d'en travailler cinq.

1. Combien de combinaisons d'exercice pouvez-vous construire ?
2. Le professeur insiste sur le fait que l'exercice 8 est à le travailler absolument. Il vous reste donc 4 exercices à choisir. Combien de combinaisons pouvez-vous construire ?

▶ **Exercice 24 :** Dans une grille de loto, il faut choisir cinq nombres de 1 à 49 ainsi qu'un nombre chance allant de 1 à 10. De combien de manières différentes peut-on remplir sa grille de loto ?

▶ **Exercice 25 :** On considère un jeu de 32 cartes. Chaque carte possède une couleur (Coeur, Pique, trèfle, Carreau) et une valeur (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7). Une main est un ensemble de 5 cartes tirées dans ce paquet, sans tenir compte de l'ordre des cartes tirées. Déterminer le nombre de mains :

- comportant exactement 3 coeurs ;
- comportant exactement un roi et exactement deux dames ;
- comportant au plus 2 roi.

▶ **Exercice 26 :** On lance simultanément dix pièces de monnaies et on regarde de quel côté elles tombent.

1. Combien de configurations avec 3 pièces tombant sur FACE existe-t-il ?
2. Combien de configurations avec au plus 3 pièces tombant sur FACE existe-t-il ?

▶ **Exercice 27 :** Un entraîneur doit constituer une équipe de football. Il a à sa disposition 3 gardiens de buts, 8 défenseurs, 6 milieux de terrain et 6 attaquants. Il doit alors constituer une équipe en désignant 1 gardien, 4 défenseurs, 3 milieux de terrain et 3 attaquants. Combien d'équipes peut-il construire ?

4 Exercices de synthèse

► **Exercice 28 :** En entrant en première, il vous a été demandé de choisir trois spécialités parmi les douze proposées.

1. Combien de choix différentes pouviez-vous faire ?
2. Un élève de seconde sait qu'il devra abandonner une spécialité en terminale. Il décide donc de choisir deux spécialités qu'il conservera et une qu'il abandonnera. Combien a-t-il de choix ?

► **Exercice 29 :** Une associations sportive propose diverses activités telles que le football, le handball, l'athlétisme etc. Ces activités sont au nombre de 20. Sur sa fiche d'inscription, chaque adhérent doit alors choisir 3 activités au maximum parmi ces 20.

1. Si la préférence des activités n'entre pas en compte, combien de fiches d'inscription différentes peut-on former ?
2. Face à l'affluence grandissante, l'association à ses adhérents de classer ces 3 disciplines au maximum selon les préférences de l'adhérent. Combien de fiches différentes peut-on alors former ?

► **Exercice 30 :** Une assemblée de 30 personnes souhaite élire une délégation de 4 personnes pour les représenter à un congrès.

1. Combien de délégations peut-on ainsi désigner ?
2. Alice et Bob ne se supportent pas et ne souhaitent pas faire tous deux partie de la délégation. Combien de possibilités reste-t-il ?
3. Alice et Bob acceptent finalement de travailler ensemble s'il le faut. Toutefois, les inséparables Camille et Dominique ne feront partie de la délégation que s'ils sont choisis tous deux. Combien de délégations différentes peut-on former dans ces conditions ?

► **Exercice 31 :** Soit n un entier naturel non nul et A un ensemble fini de cardinal n. Pour tout $k \leqslant n$, on note P_k l'ensemble des parties de A ayant k éléments.

1. Rappeler le cardinal de P_k.
2. Que vaut l'union des P_k pour k allant de 0 à n ? Cette union est-elle disjointe
3. En déduire que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

► **Exercice 32 :** Dans une assemblée de n personnes, on souhaite élire k personnes dans une commission. L'une de ces k personnes en sera la présidente.

1. Combien de commissions avec son président peut-on ainsi constituer ?
2. On procède différemment : on choisit d'abord le président de la commission puis on choisit les autres membres parmi les personnes restantes. De combien de manières peut-on procéder ?
3. En déduire l'égalité suivante :

$$n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$$

4. Retrouver cette égalité à l'aide de la formule sur les coefficients binomiaux.