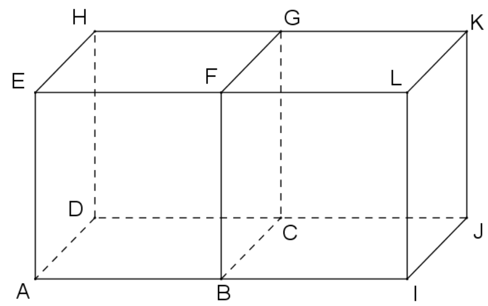
Exercices : Géométrie dans l'espace

1 Vecteurs de l'espace

► **Exercice 1 :** On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte. Compléter les égalités de vecteurs suivantes :

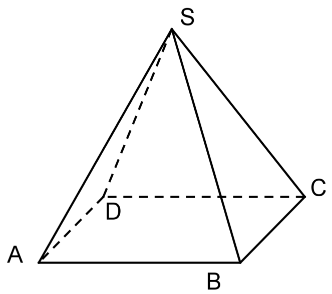
- $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{A\ldots}$
- $\overrightarrow{EK} + \overrightarrow{LF} = \overrightarrow{B\ldots}$
- $\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{HK} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{F\ldots}$



► **Exercice 2 :** En utilisant la même figure, exprimer...

- ... le vecteur $\overrightarrow{AK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IK}$.
- ... le vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{JD}$
- ... le vecteur $\overrightarrow{DL}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JE}$
- ... le vecteur $\overrightarrow{BK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{CG}$

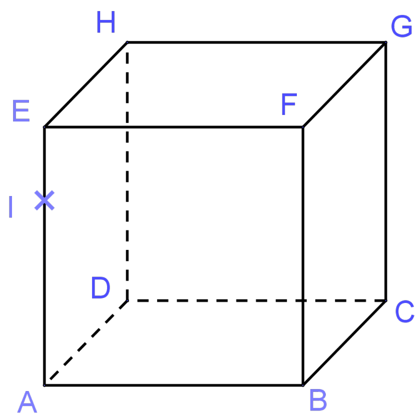
► **Exercice 3 :** Sur la même figure, constuire le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{CK}$



► **Exercice 4 :** On considère une pyramide $SABCD$ à base carrée $ABCD$ et de sommet S.

On considère les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{SA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DS}$. Montrer que $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.

2 Droites et plans de l'espace



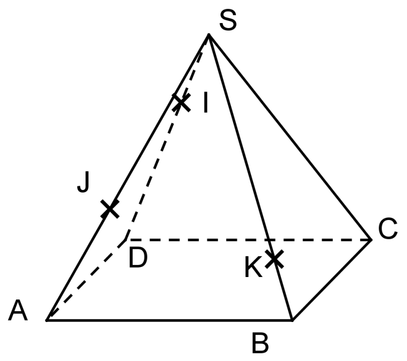
► **Exercice 5 :** On considère le $ABCDEFGH$ ci-contre, ainsi qu'un point I sur le segment $[AE]$.
Dans chacun des cas suivants, dire si les droites sont coplanaires ou non. Si oui, préciser si elles sont parallèles ou sécantes. Lorsqu'elles sont sécantes, construire le point d'intersection de ces droites.

(AB) et (FG)	(AF) et (IE)
(CD) et (EB)	(DI) et (EH)
(IB) et (FA)	(GF) et (DA)

► **Exercice 6 :** Sur le cube précédent, déterminer...

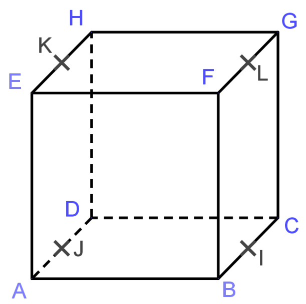
- ... l'intersection du plan (EFH) avec le plan (ADH).
- ... un plan parallèle au plan (BFG).
- ... l'intersection du plan (IFB) avec le plan (HDB).
- ... l'intersection du plan (GIC) avec le plan (HAD).
- ... un plan parallèle au plan (IEB)

► **Exercice 7 :** On considère une pyramide $SABCD$ de sommet S et de base carrée. On place un point I sur $[DS]$, un point J sur $[AS]$ et un point K sur $[BS]$ de telle sorte que les droites (JK) et (AB) ne sont pas parallèles, de même que les droites (IK) et (BD)



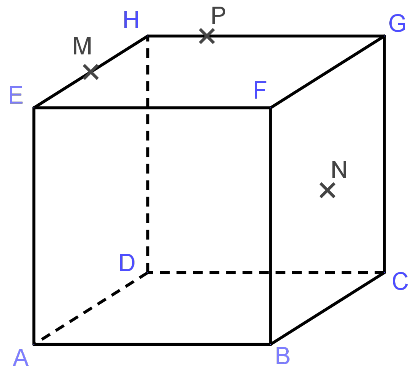
1. Justifier que les droites (IJ) et (AD) sont sécantes et construire leur point d'intersection.
2. Justifier que les droites (IK) et (BD) sont sécantes et construire leur point d'intersection.
3. Construire alors l'intersection des plans (ABD) et (IJK).
4. Sans justifier la construction, vérifier que l'intersection des droites (JK) et (BD) se trouve sur cette droite.

► **Exercice 8 :** On considère un cube $ABCDEFGH$ ainsi que les points I, J, K et L, milieux respectifs de $[BC]$, $[AD]$, $[EH]$ et $[FG]$



1. Montrer que $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AK}$
2. En déduire que le point L appartient au plan (AKB)
3. Montrer que le point J appartient au plan (GHI)
4. Montrer que les plans (GHI) et (AKB) sont parallèles.

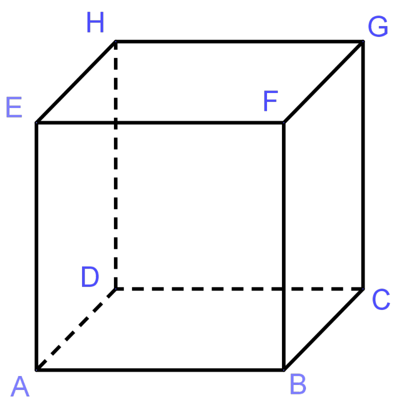
► **Exercice 9 — BAC S – Rochambeau 2014. :** On considère un cube $ABCDEFGH$. On note M le milieu du segment $[EH]$, N celui de $[FC]$ et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.



1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L. Construire le point L (vous pouvez reproduire la figure sur une autre feuille, les constructions peuvent déborder du cadre).
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection. On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   (a) Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   (b) Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

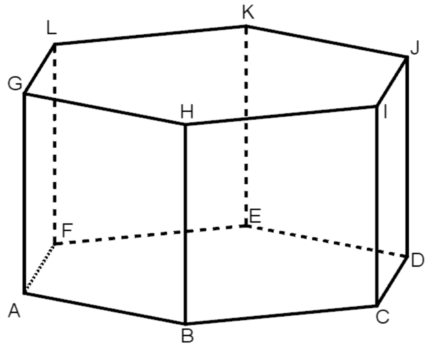
3 Repère de l'espace

► **Exercice 10 :** Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, donner...



- ... les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BH}$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.
- ... les coordonnées du point F dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$
- ... les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AG}; \overrightarrow{AH})$.
- ... les coordonnées du point G dans le repère $(B; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AG}; \overrightarrow{AH})$.
- ... les coordonnées du point I, milieu de $[BG]$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.
- ... les coordonnées du point J, milieu de $[FH]$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB})$.

► **Exercice 11 :** On considère un prisme droit $ABCDEFGHIJKL$ dont la base est un hexagone régulier $ABCDEFGH$.



1. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG})$.
   (a) Donner les coordonnées des points D, E, H et J dans ce repère
   (b) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{GD}$ dans ce repère.
2. Reprendre les questions précédentes en se plaçant dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AH})$.

► **Exercice 12 :** On se place dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $A(1;-1;2)$, $B(5;1;8)$, $C(-3;2;-1)$ et $D(-1;3;2)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Que peut-on en déduire sur les droites (AB) et (CD) ?

► **Exercice 13 :** On se place dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(1;3;5)$, $B(2;7;-1)$ et $C(5;19;-19)$

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

► **Exercice 14 :** On se place dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1;2;3)$, $B(3;-1;2)$, $C(0;1;1)$ et $D(5;1;6)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que ces trois vecteurs sont coplanaires. Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?

► **Exercice 15 :** On se place dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(2;4;-1)$, $B(3;-2;5)$ et $C(6;7;-2)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer les coordonnées du point I, milieu de $[BC]$
3. Déterminer les coordonnées du point J tel que $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
4. Déterminer les coordonnées du point K tel que C soit le milieu de $[AK]$

► **Exercice 16 :** On se place dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives $A(2;2;0)$, $B(0;1;0)$, $C(1;0;1)$, $D(0;0;3)$ et $E(-1;4;0)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment-ils une base de l'espace ?
3. Donner les coordonnées du point E dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

4 Représentations paramétriques de droite

▶ **Exercice 17 :** Donner une représentation paramétrique de la droite passant par le point $A(2;5;-3)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}$

▶ **Exercice 18 :** On considère les points $A(1;3,-2)$ et $B(2;5;-4)$. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

▶ **Exercice 19 :** On considère les points $A(1;2;7)$ et $B(3;-1;6)$ ainsi que la droite Δ admettant pour représentation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = 1 + 6t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. Le point A appartient-il à la droite Δ ?
2. Les droites (AB) et Δ sont-elles parallèles ?

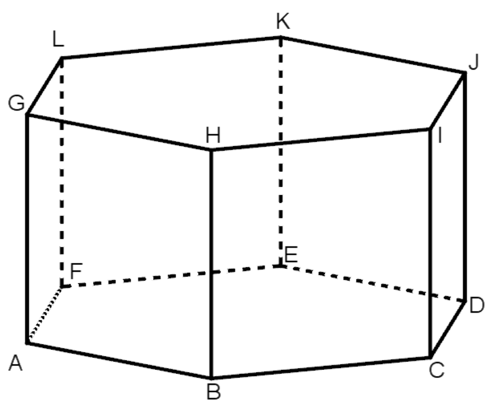
▶ **Exercice 20 :** On considère les droites (d_1) et (d_2) admettant pour représentations paramétriques

$$(d_1) : \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 11 - 3t \\ z = 11 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (d_2) : \begin{cases} x = 7 - 4t' \\ y = 1 - 2t' \\ z = -2 + 5t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

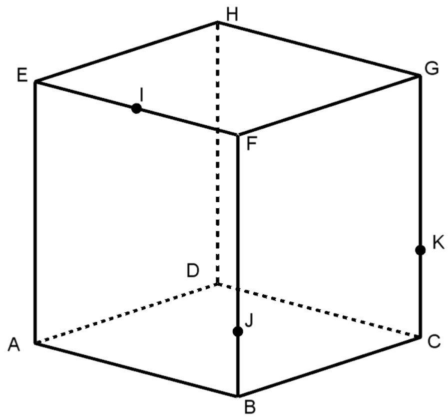
Montrer que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes en un point dont on donnera les coordonnées.

5 Exercices de synthèse

▶ **Exercice 21 :** On considère un prisme droit $ABCDEFGHIJKL$ dont la base est un hexagone régulier $ABCDEFGH$. Les droites (AI) et (BK) sont-elles sécantes ?



► **Exercice 22 :** On se place dans un cube $ABCDEFGH$. On considère le point I, milieu de $[EF]$, le point J tel que $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BF}$ et le point K tel que $\overrightarrow{CK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CG}$. L'espace est muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$



1. Montrer que les droites (IJ) et (AB) sont sécantes. On note M leur point d'intersection
2. A l'aide de deux autres droites sécantes, construire sur la figure ci-dessus, en justifiant la construction, l'intersection des plans (ABC) et (IJK)
3. On considère le point L de coordonnées $\left(\dfrac{5}{9}; 1; 1\right)$
   (a) Sur quelle arête se situe le point L ?
   (b) Montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.
   (c) En déduire que les droites (IK) et (LJ) sont sécantes.
   (d) Donner une équation paramétrique de ces deux droites et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.