Dérivation

1 Rappels sur la dérivation

1.1 Fonction dérivée

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et h un réel non nul tel que $a + h \in I$.

- On dit que f est dérivable en a si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Cette limite est appelée "nombre dérivé de f en a" et est notée $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$. On appelle alors fonction dérivée de f sur I la fonction

$$f' : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{cases}$$

■ **Exemple 1 :** On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Soit x un réel et h un réel non nul.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

Lorsque h se rapproche de 0, cette quantité tend vers $2x$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2x$. ■

1.2 Dérivées usuelles

$f : x \mapsto$	Définie sur	Dérivable sur	$f' : x \mapsto$
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$mx + p$, m et p réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	m
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^n pour $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\exp(ax+b)$, a et b réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a\exp(ax+b)$

1.3 Opérations sur les dérivées

Théorème 1.1 : Soit I un intervalle, u et v deux fonctions dérivables sur I, k un réel. Alors les fonction $k\,u$, $u+v$ et uv sont dérivables sur I. Si de plus, v ne s'annule pas sur I, $\frac{u}{v}$ est également dérivable. On a de plus

$$(k\,u)' = k\,u' \qquad (u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

■ **Exemple 2 :** On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 4x + 1)\exp(x)$, définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = x^2 - 4x + 1$ et $v(x) = \exp(x)$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 2x - 4$
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = \exp(x)$
- Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$

Pour tout réel x,

$$f'(x) = (2x-4)\times\exp(x) + (x^2 - 4x + 1)\times\exp(x) = (x^2 - 2x - 3)\exp(x)$$

■

1.4 Tangente à la courbe

Définition 2 : Soit f une fonction dérivable en a. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite de coefficient directeur $f'(a)$ et passant par le point de coordonnée $(a; f(a))$.

Propriété 1 : Soit f une fonction dérivable en a. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)\times(x-a) + f(a)$$

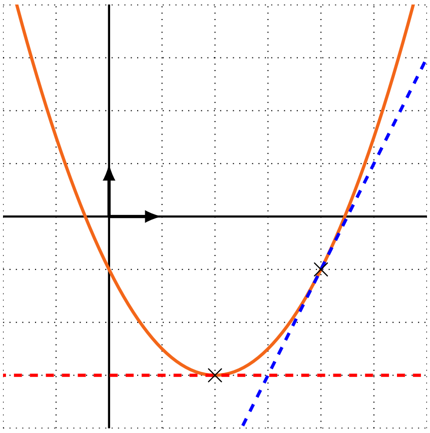
■ **Exemple 3 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x - 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = x - 2$.

Déterminons l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4

- $f'(4) = 4 - 2 = 2$
- $f(4) = \frac{4^2}{2} - 2\times4 - 1 = -1$
- Cette tangente a pour équation

$$y = f'(4)\times(x-4) + f(4) = 2(x-4) - 1 = 2x - 9$$

■



1.5 Variations d'une fonction

Propriété 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I

■ **Exemple 4 :** On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 4x + 1)\exp(x)$ étudiée précédemment. On a vu que pour tout réel x, $f'(x) = (x^2 - 2x - 3)\exp(x)$. Or, pour tout réel x, $\exp(x) > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $(x^2 - 2x - 3)$.

Il s'agit d'un polynôme du second degré. Son discriminant Δ vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$. Ainsi, le polynôme $(x^2 - 2x - 3)$ admet deux racines qui sont

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 3$$

On a de plus $f(-1) = ((-1)^2 - 4 \times (-1) + 1)e^{-1} = 6e^{-1} = \dfrac{6}{e}$ et $f(3) = (3^2 - 4 \times 3 + 1)e^3 = -2e^3$

On peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire les variations de f.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\frac{6}{e}$	$\searrow$	$-2e^3$	$\nearrow$	

■

2 Dérivée seconde

Définition 3 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa fonction dérivée f' est également dérivable sur I (on dit également que f est deux fois dérivable sur I). On appelle fonction dérivée seconde de f la fonction dérivée de f'. Cette fonction est notée f''.

$$\text{Pour tout } x \in I \; f''(x) = (f')'(x)$$

■ **Exemple 5 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = (2x+1)e^{3x-2}$. Posons, pour tout réel x, $u_1(x) = 2x+1$ et $v_1(x) = e^{3x-2}$

- u_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_1'(x) = 2$
- v_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v_1'(x) = 3e^{3x-2}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = u_1'(x) \times v_1(x) + u_1(x) \times v_1'(x) = 2 \times e^{3x-2} + (2x+1) \times 3e^{3x-2} = (6x+5)e^{3x-2}$$

Posons alors, pour tout réel x, $u_2(x) = 6x+5$ et $v_2(x) = e^{3x-2}$

- u_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_2'(x) = 6$
- v_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v_2'(x) = 3e^{3x-2}$.

Ainsi, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f''(x) = u_2'(x) \times v_2(x) + u_2(x) \times v_2'(x) = 6 \times e^{3x-2} + (6x+5) \times 3e^{3x-2} = (24x+21)e^{3x-2}$$

■

3 Composition de fonctions

Définition 4 : Soit I et J deux parties de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur J et g une fonction définie sur I telle que pour tout réel x, $g(x) \in J$.

On définit la fonction composée de f et g notée $f \circ g$ par

$$\text{Pour tout } x \in I, \; f \circ g(x) = f(g(x))$$

■ **Exemple 6 :** Pour tout réel x, on note $f(x) = x^2$ et $g(x) = x+3$. Alors, pour tout réel x,

- $f \circ g(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (x+3)^2$
- $g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x) + 3 = x^2 + 3$

■

R En général, on n'a pas $f \circ g = g \circ f$!

Propriété 3 : Soit I et J deux intervalles, f une fonction définie et dérivable sur J et g une fonction définie et dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $g(x) \in J$. Alors $f \circ g$ est dérivable et pour tout réel x dans I,

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times (f' \circ g)(x)$$

■ **Exemple 7 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{x^2+3x-2}$. Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = e^x$ et $v(x) = x^2+3x-2$. On a alors $f(x) = u(v(x)) = u \circ v(x)$.

- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = 2x+3$
- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = e^x$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = (2x+3)e^{x^2+3x-2}$$

■

Propriété 4 — Cas particuliers. : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

- Pour tout entier naturel n, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u' \times e^u$.
- Si pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
- Si pour tout réel x, $u(x) \neq 0$, $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\dfrac{u'}{u^2}$.

■ **Exemple 8 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = (4x+1)^9$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 4x+1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$. Or, $f = u^9$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 9 \times u' \times u^8$, c'est-à-dire que pour tout réel x

$$f'(x) = 9 \times 4 \times (4x+1)^{9-1} = 36 \times (4x+1)^8$$

■

■ **Exemple 9 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = x^2+1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas. Or, $f = \dfrac{1}{u}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = -\dfrac{u'}{u^2}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

■