Succession d'épreuves aléatoires

1 Répétition d'épreuves indépendantes

Définition 1 : Des expériences aléatoires sont dites indépendantes et identiquement distribuées (ou indépendantes et identiques) si ces expériences ont les mêmes issues, et si chaque issue a la même probabilité peu importe l'expérience.

■ **Exemple 1 :** On lance 5 fois un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6. Chaque lancer a les mêmes issues, à savoir les entiers entre 1 et 6 inclus. De plus, chaque issue a une probabilité identique, peu importe le lancer, puisque l'on utilise le même dé. Le résultat du premier lancer n'influe en rien sur le résultat des autres lancers. ■

Propriété 1 : On considère n expériences aléatoires identiques et indépendantes, ainsi que n issues A_1, A_2, ..., A_n de cette expérience. La probabilité d'obtenir successivement les issues A_1, A_2, ..., A_n est égal au produit des probabilités de ces issues.

$$\mathbb{P}((A_1;A_2;\ldots;A_n)) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_n)$$

■ **Exemple 2 :** On lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On considère les événements

- A : le résultat est pair
- B : le résultat est 6
- C : le résultat n'est pas 1

Puisque le dé est équilibré, nous sommes dans le cadre de la loi uniforme. Ainsi, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(C) = \dfrac{5}{6}$.

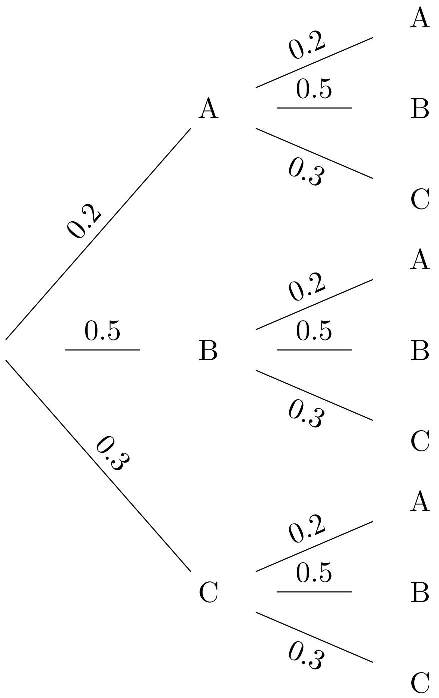
On lance maintenant ce dé 4 fois de suite et on souhaite calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair au premier et au quatrième lancer, d'obtenir 6 au troisième lancer et de ne pas obtenir 1 au deuxième lancer. On souhaite donc obtenir la suite d'issues (A, C, B, A). Ainsi,

$$\mathbb{P}((A, C, B, A)) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{144}$$

■

R Si l'on essaie de représenter une succession de n épreuves indépendantes sous la forme d'un arbre de probabilités, on place alors toujours le même sous-arbre à chaque noeud.

■ **Exemple 3 :** L'arbre suivant traduit une succession de deux épreuves indépendantes. En effet, chaque expérience possède les mêmes issues A, B et C, avec toujours les mêmes probabilités pour chacune de ces trois issues.



Ainsi, la probabilité de la succession d'issues (A, B) a bien pour probabilité $0,2 \times 0,5 = 0,1$, soit $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. ■

2 Epreuve de Bernoulli

Définition 2 : Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire dont l'univers ne comporte que deux issues : le succès S et l'échec $\overline{S}$. On note p la probabilité de succès, aussi appelé paramètre de l'épreuve de Bernoulli. La probabilité d'échec vaut donc $1 - p$.

Une variable aléatoire X sur cet univers suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. On écrit $X \sim \mathcal{B}(p)$.

■ **Exemple 4 :** On lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. Si on considère le succès "Obtenir le nombre 6", cette expérience est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$. ■

Propriété 2 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. L'espérance, la variance et l'écart-type de X valent respectivement

$$E[X] = p, \quad Var(X) = p(1-p), \quad \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$$

Démonstration 2.1 : La variable aléatoire X prend les valeurs 0 et 1. De plus $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$. Ainsi,

- $E[X] = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$.
- $Var(X) = \mathbb{P}(X = 0) \times (0 - E[X])^2 + \mathbb{P}(X = 1) \times (1 - E[X])^2 = (1-p) \times (-p)^2 + p \times (1-p)^2 = p(1-p)(p + 1 - p) = p(1-p)$

□

■ **Exemple 5 :** Soit X un variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $0,2$. On a alors $E[X] = 0,2$, $Var(X) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$ et $\sigma(X) = \sqrt{0,16} = 0,4$. ■

Définition 3 : Un schéma de Bernoulli de paramètre p est une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, chacune de paramètre p.

■ **Exemple 6 :** On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On considère comme succès "la pièce tombe sur FACE". ■

3 Loi binomiale

Définition 4 : Soit n un entier naturel. On considère un schéma de Bernoulli à n épreuve de paramètre p. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et b. On écrit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

■ **Exemple 7 :** On lance une pièce équilibrée 5 fois de suite et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de FACE obtenus

- On a bien des épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques.
- Ces épreuves sont au nombre de 5.
- Pour chaque épreuve, la probabilité de succès (c'est-à-dire ici la probabilité d'obtenir FACE) vaut $\frac{1}{2}$

Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{2}$. ■

R Lorsque n vaut 1, on a une loi de Bernoulli de paramètre p.

R La première mention de la loi binomiale date de 1713, année de parution de l'Ars Conjectandi de Jacques Bernoulli. Ce livre publié à titre posthume - Jacques Bernoulli est décédé en 1705 - marquera un tournant dans l'histoire des probabilités. Y figurera notamment l'énoncé de la loi faible des grands nombres qui sera l'objet d'un chapitre ultérieur...

Propriété 3 : Soit n un entier naturel, p un réel compris entre 0 et 1 et X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Démonstration 3.1 : On considère un schéma de Bernoulli de paramètre p à n épreuves. L'ensemble des issues aboutissant à k succès correspond à l'ensemble des n-uplets de $\{S;\overline{S}\}$ ayant exactement k fois la lettre S. Il y en a donc $\binom{n}{k}$. Or, chacune de ces issues a pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$: chacun des k succès a une probabilité de p et chacun des $n-k$ échecs a une probabilité $1-p$. Ainsi,$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. □

■ **Exemple 8 :** On lance 3 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 fois le nombre 4 ? On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 4 obtenus. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ (le nombre de lancers) et $p = \frac{1}{6}$ (la probabilité de succès, obtenir 4, en un lancer). On cherche donc la probabilité de l'événement $X = 2$, c'est-à-dire "obtenir exactement 2 succès".

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{n}{2} \times p^2 \times (1-p)^{n-2} = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{75}$$

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le nombre 6 ? On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenus. Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ (le nombre de lancers) et $p = \frac{1}{6}$ (la probabilité de succès, obtenir 6, en un lancer). On cherche donc la probabilité de l'événement $Y \geqslant 1$, c'est-à-dire "obtenir au moins 1 succès". Il y a plusieurs manières de procéder

- Décomposer l'événement $Y \geqslant 1$ en donnant tous les cas possibles : $Y = 1$, $Y = 2$ ou $Y = 3$
- Passer par le complémentaire : $\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(Y < 1)$. Or, la seule valeur pour laquelle $Y < 1$ est $Y = 0$. Ainsi, $\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0)$. Or, $\mathbb{P}(Y = 0) = \binom{3}{0} \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$. Finalement, $\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

∎