Continuité

1 Continuité d'une fonction réelle

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$.

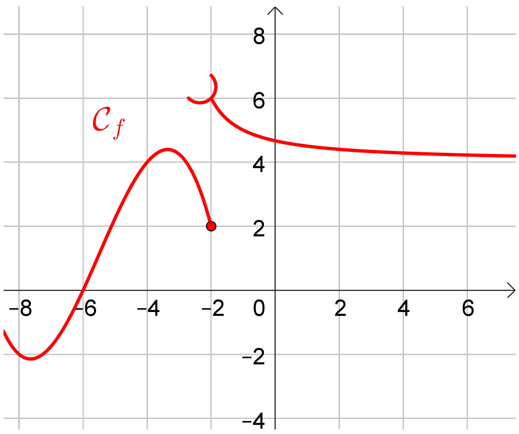
- On dit que f est continue en a si f admet une limite en a, par valeurs supérieures et par valeurs inférieures, et que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$
- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout réel de I.

■ **Exemple 1 :** Jusqu'ici, les fonction de référence rencontrées étaient continues sur leur domaine de définition :

- Les fonctions polynômes, les fonctions quotients de polynômes ;
- les fonctions trigonométriques cos et sin ;
- la fonction exponentielle
- la fonction Racine Carrée, la fonction Valeur absolue.

■

■ **Exemple 2 :** On considère la fonction f dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



On remarque que $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = 2$ et que $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = 6$. Ces deux valeurs sont différentes, la fonction f n'est pas continue en 2. Graphiquement, on voit que la courbe de la fonction fait un "saut" en $x = -2$. ■

■ **Exemple 3 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 2x+9 & \text{si } x < -2 \\ x^2+1 & \text{si } -2 \leqslant x < 3 \\ 4x-4 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$

La fonction f est continue sur $]-\infty; -2[$, $]-2; 3[$ et $]3; +\infty[$. Il faut étudier la continuité aux bords de chaque intervalle.

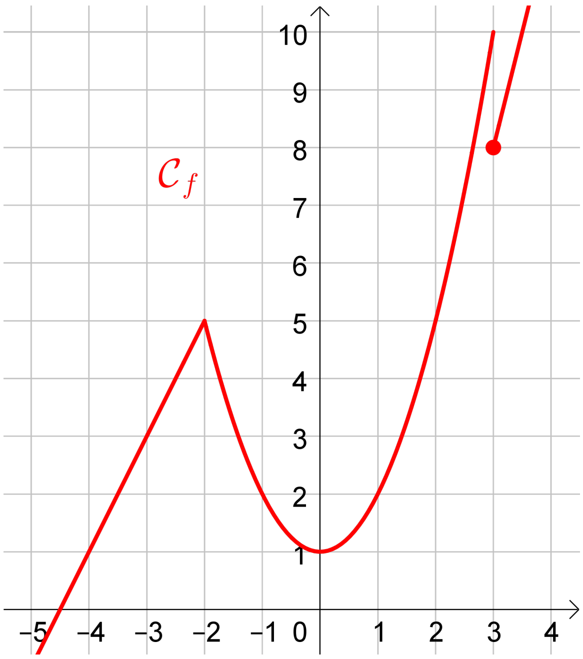
Continuité en -2

- $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$
- $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^-} (2x+9) = 2 \times (-2) + 9 = 5$
- $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^+} (x^2+1) = 5$
- Ainsi, f est continue en -2

Continuité en 3

- $f(3) = 4 \times 3 - 4 = 8$
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 + 1) = 3^2 + 1 = 10$
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq f(3)$. Ainsi, f n'est pas continue en 3

Encore une fois, une représentation graphique nous permet de nous assurer de tout cela.



■

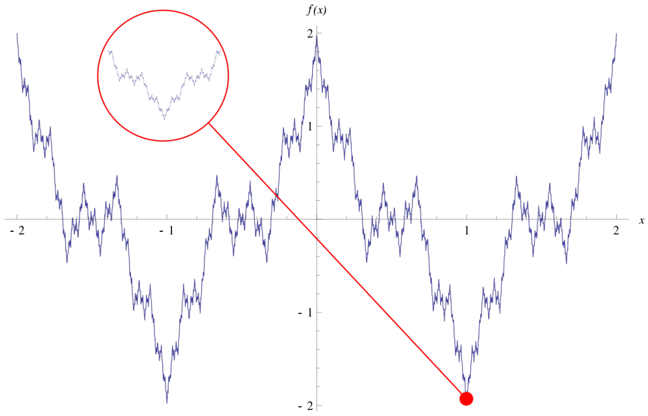
Propriété 1 : La somme et le produit de fonctions continues sur un intervalle I sont continus sur I.

Exemple : La fonction $x \mapsto \cos(x)(x^2 + 3\sqrt{x}) - \sin(x)e^x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

Théorème 1.1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

R la réciproque est fausse. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.

Il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui ne sont dérivables nulle part ! Les exemples les plus connus sont sans doute les fonctions de Weierstrass. Ce sont des courbes fractales : peu importe le niveau de zoom que l'on peut avoir sur la courbe, on verra toujours de nouveaux détails apparaître.



2 Suites et application continue

Propriété 2 : Soit I un intervalle et (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$. Soit g une fonction définie sur l'intervalle I.

Si la suite (u_n) est convergente avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et si g est continue en l, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(l)$

En d'autres termes, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$.

■ **Exemple 4 :** Pour tout entier naturel n, on note $u_n = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 1.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = \sqrt{1} = 1$ ■

R L'hypothèse de continuité est primordiale ! Pour tout réel x, notons $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x, c'est-à-dire le plus grand entier qui soit plus petit que x. Par exemple, $\lfloor 1,3 \rfloor = 1$.

Pour tout entier naturel non nul n, on note $u_n = 1 - \dfrac{1}{10^n}$. On a ainsi $u_0 = 0$, $u_1 = 0,9$, $u_2 = 0,999$, $u_3 = 0,9999$ etc.

- Pour tout entier naturel non nul, $\lfloor u_n \rfloor = 0$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lfloor u_n \rfloor = 0$
- La suite (u_n) est convergente et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Ainsi, $\lfloor \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \rfloor = g(1) = 1$.
- On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \lfloor u_n \rfloor \neq \lfloor \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \rfloor$. On montre en fait que la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en 1.

Propriété 3 : Soit I un intervalle et (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$ et $u_{n+1} = g(u_n)$. Soit g une fonction définie et continue sur l'intervalle I.

On suppose que la suite (u_n) est convergente, de limite $l \in I$. Alors $g(l) = l$.

Démonstration 2.1 : Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = g(u_n)$. La suite (u_n) étant convergente, il est possible de passer à la limite dans cette égalité.

- D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$
- D'autre part, puisque la fonction g est continue sur I, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) = g(l)$

Ainsi, $g(l) = l$. □

■ **Exemple 5 :** On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$
On admet que la suite (u_n) est croissante et que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 4$.
Puisque la suite (u_n) est croissante et majorée, la suite (u_n) converge. Notons l sa limite.
Puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{3x + 4}$ est continue sur $\left]-\dfrac{4}{3}; +\infty\right[$ et que $l \in [2; 4]$, on a alors $g(l) = l$.
Or, $g(l) = l \Leftrightarrow l = \sqrt{3l + 4}$. En mettant le tout au carré, on obtient alors $l^2 - 3l - 4 = 0$ qui est une équation du second degré ayant deux solutions : 1 et 4.
Dans notre cas, la solution 1 est impossible puisque pour tout n, $u_n \geqslant 2$. Ainsi, $l = 4$. ■

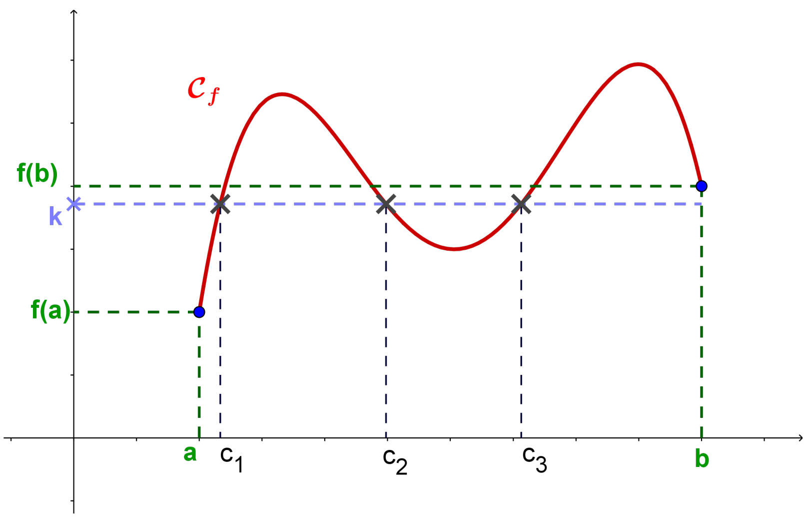
3 Théorème des valeurs intermédiaires

3.1 Cas général

Théorème 3.1 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors il existe au moins un réel c tel que $f(c) = k$.

R Ce théorème indique que, sous hypothèse de continuité, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur $[a; b]$ mais elle ne nous dit pas laquelle.

Illustration : On représente une fonction f ci-dessous.



Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, k possède au moins un antécédent par f. Dans cet exemple, il y en a trois.

■ **Exemple 6 :** On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - 4x$, définie sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(0) = 1$ et $f(1) = e - 4$. En particulier, $f(1) < 0$.
Le réel 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c dans $[0; 1]$ tel que $f(c) = 0$.
Autrement dit, il existe un réel c dans $[0; 1]$ tel que $e^c = 4c$.
Il est possible d'encadrer cette solution à l'aide d'un algoritheoreme de dichotomie.

- $f(0) = 1$ et $f(1) = e - 4$. Ainsi, le réel c recherché est dans l'intervalle $[0; 1]$.

- Calculons $f\left(\frac{0+1}{2}\right)$. $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{0,5} - 4 * 0,5 \simeq 0.35 < 0$. Ainsi, le réel recherché est dans l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$
- Calculons $f\left(\frac{0+\frac{1}{2}}{2}\right)$. $f\left(\frac{1}{4}\right) = e^{0,25} - 4 * 0,25 \simeq 0.28 > 0$. Ainsi, le réel recherché est dans l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$
- Calculons $f\left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2}\right)$. $f\left(\frac{3}{8}\right) = e^{0,375} - 4 * 0,375 \simeq -0.05 < 0$. Ainsi, le réel recherché est dans l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{8}\right]$

Et ainsi de suite. On trouve un encadrement de plus en plus précis d'une solution de l'équation $e^x = 4x$. ■

3.2 Fonction strictement monotone

Théorème 3.2 : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe un unique réel c tel que $f(c) = k$.

■ **Exemple 7 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{x^2+1}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$.

Pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 0$. De plus, f' ne s'annule qu'en $x = 1$. Ainsi, la fonction f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

On a par ailleurs que $f(0) = 1$ et $f(1) = \frac{e}{2} \simeq 1,36$. Ainsi, l'équation $f(x) = 1,25$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0; 1]$. ■

R Il est également possible d'utiliser les limites dans le théorème des valeurs intermédiaires. Dans le cas précédent, on avait $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi, pour tout réel strictement positif k, l'équation $f(x) = k$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.