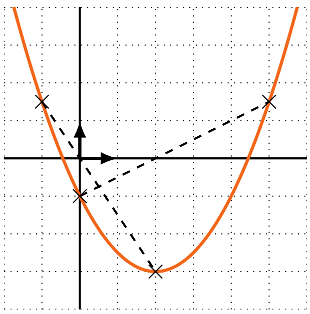
Convexité

1 Convexité, concavité

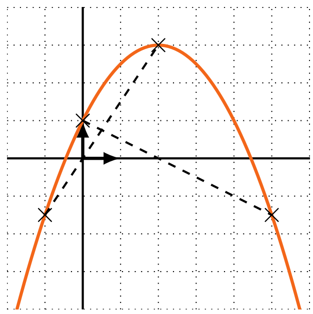
Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- On dit que f est convexe sur I si **tout segment** reliant deux points de la courbe se trouve au-dessus de la courbe
- On dit que f est concave sur I si **tout segment** reliant deux points de la courbe se trouve en-dessous de la courbe

Fonction convexe



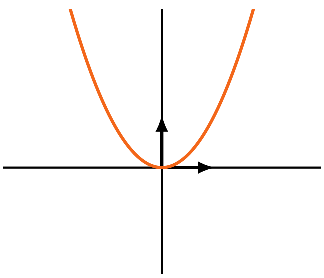
Fonction concave



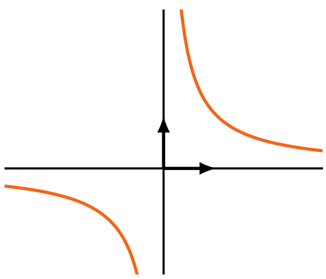
■ **Exemple 1 :** Les fonction $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction $x \mapsto x^3$ est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$. ■

Rappel des courbes représentatives

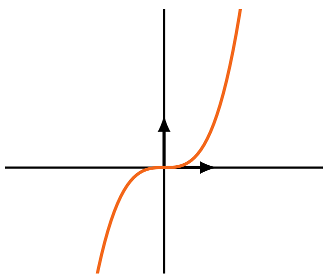
$x \mapsto x^2$



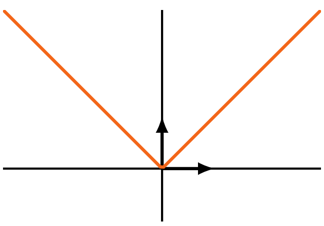
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$



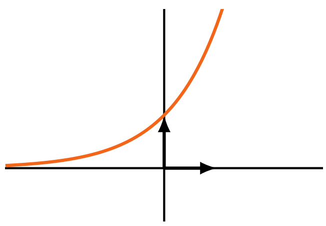
$x \mapsto x^3$



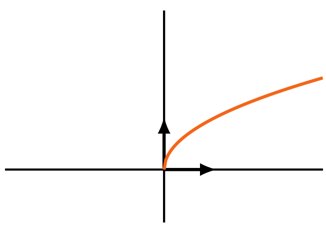
$x \mapsto |x|$



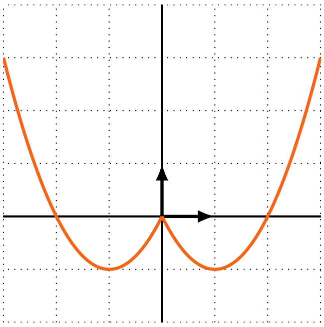
$x \mapsto e^x$



$x \mapsto \sqrt{x}$



■ **Exemple 2 :** Attention : on parle bien de convexité sur un intervalle. Par ailleurs, ce n'est pas parce qu'une fonction f est convexe sur deux intervalles $[a,b]$ et $[b,c]$ que f est aussi convexe sur $[a,c]$



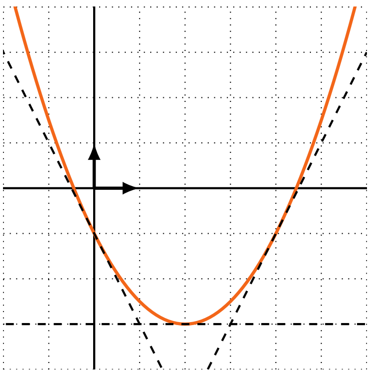
La fonction représentée ci-dessus est convexe sur $[-3;0]$ et sur $[0;3]$ mais n'est pas convexe sur $[-3,3]$. ■

2 Fonctions dérivables

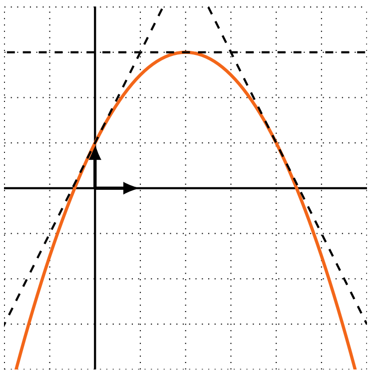
Propriété 1 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- f est convexe sur I si la courbe $\mathcal{C}_f$ se trouve au-dessus de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.
- f est concave sur I si la courbe $\mathcal{C}_f$ se trouve en-dessous de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.

Fonction convexe



Fonction concave



■ **Exemple 3 :** Montrons que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit a un réel.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.
- La tangente à $\mathcal{C}_f$ a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire $y = 2ax - 2a^2 + a^2$ ou encore $y = 2ax - a^2$.
- Pour tout réel x,

$$f(x) - (2ax - a^2) = x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2 \geqslant 0$$

Ainsi, pour tout réel x, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente à l'abscisse a, et ce, peu importe le réel a choisi. f est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

■

Propriété 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I
- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

De cette propriété vient naturellement la suivante...

Propriété 3 : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$
- f est concave sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$

Démonstration 2.1 : **Si $f'' \geqslant 0$, alors f est convexe** : Soit f une fonction deux fois dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.

Soit $a \in I$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Pour tout $x \in I$, posons alors $g(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$. g est deux fois dérivable sur I, et pour tout $x \in I$
- $g'(x) = f'(x) - f'(a)$
- $g''(x) = f''(x)$

Ainsi, puisque pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$, on a aussi $g''(x) \geqslant 0$. g' est donc croissante sur I. Or, $g'(a) = 0$.
- Soit $x \in I$ tel que $x < a$.
  - Par croissance de g' sur I, on a alors $g'(x) \leqslant g'(a)$ c'est-à-dire $g'(x) \leqslant 0$.
  - g est donc décroissante sur $]-\infty; a] \cap I$.
  - On a donc $g(x) \geqslant g(a)$.
  - Or, $g(a) = f(a) - f'(a) \times (a-a) - f(a) = 0$. Ainsi, $g(x) \geqslant 0$
- Soit $x \in I$ tel que $x > a$
  - Par croissance de g' sur I, on a alors $g'(x) \geqslant g'(a)$ c'est-à-dire $g'(x) \geqslant 0$.
  - g est donc croissante sur $[a; +\infty[\cap I$.
  - On a donc $g(x) \geqslant g(a)$.
  - Or, $g(a) = f(a) - f'(a) \times (a-a) - f(a) = 0$. Ainsi, $g(x) \geqslant 0$

Finalement, pour tout $x \in I$, $g(x) \geqslant 0$, ce qui signifie que le courbe de f est au-dessus de la tangente à cette courbe au point d'abscisse a. □

■ **Exemple 4 :** Pour tout entier naturel pair n, la fonction $x \mapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$. ■

■ **Exemple 5 :** La fonction $f : x \mapsto x^3$ est concave sur $]-\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$.

En effet, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f''(x) = 6x$, qui est positif si et seulement si x l'est aussi. ■

3 Applications de la convexité

3.1 Inégalités de convexité

Propriété 4 : Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Pour tous réels a et b de I,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Démonstration 3.1 : On considère les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$. Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$. Or, la fonction f étant convexe sur I, le segment $[AB]$ se situe au-dessus de la courbe représentative de f. En particulier,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

□

■ **Exemple 6 :** La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b,

$$exp\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{e^a+e^b}{2}$$

■

Propriété 5 : Soit f une fonction concave sur un intervalle I. Pour tous réels a et b de I,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

■ **Exemple 7 :** La fonction Racine carrée est concave sur $[0; +\infty[$. Pour tous réels a et b positifs,

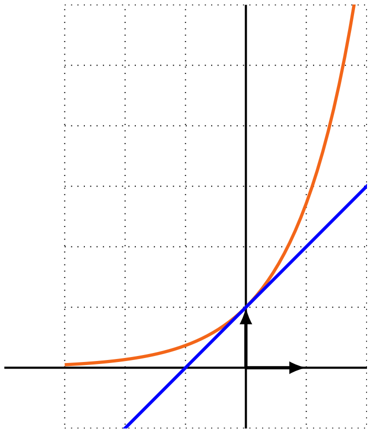
$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$$

■

Par ailleurs, la convexité des fonctions dérivables permet d'établir des inégalités en utilisant les équations des tangentes.

■ **Exemple 8 :** La tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \exp'(0)(x-0) + \exp(0)$, c'est-à-dire $y = x + 1$.

Puisque la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$, la courbe de la fonction exponentielle est donc au-dessus de toutes ses tangentes et donc, en particulier, la tangente au point d'abscisse 0. On a donc, pour tout réel x, $e^x \geqslant x + 1$. ■



3.2 Point d'inflexion

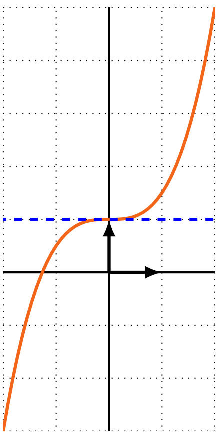
Définition 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Un point d'inflexion est un point où la convexité de la fonction f change. La tangente à la courbe de f en un point d'inflexion traverse la courbe de f.

Propriété 6 : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
- Si f présente un point d'inflexion à l'abscisse a, alors $f''(a)$.
- Réciproquement, si $f''(a) = 0$ et f'' change de signe en a, alors f présente un point d'inflexion en a.

R Cela rappelle naturellement le cas des extremum locaux. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$. Cependant, si $f'(a) = 0$, f admet un extremum local en a seulement si f' change de signe en a.

■ **Exemple 9 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{x^3}{2} + 1$. La fonction f est deux fois dérivable et pour tout réel x, $f''(x) = 3x$.
- Lorsque $x < 0$, $f''(x) < 0$, la fonction est concave, la courbe est sous ses tangentes.
- Lorsque $x > 0$, $f''(x) > 0$, la fonction est convexe, la courbe est au-dessus de ses tangentes.

■



■ **Exemple 10 :** Pour tout réel x, on pose $g(x) = \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + 2x^2$. La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$ et $g''(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

Ainsi, pour tout réel x, $g''(x) \geqslant 0$. g est donc convexe sur $\mathbb{R}$. Puisqu'il n'y a pas de changement de convexité, g ne présente pas de point d'inflexion, et ce, même si $g''(2) = 0$. ■