Logarithme népérien

1 Logarithme népérien

Définition 1 : Soit a un réel strictement positif. On appelle logarithme népérien de a, noté $\ln(a)$, l'unique solution de l'équation $e^x = a$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration 1.1 : Derrière cette définition se cache une démonstration : une telle solution existe-t-elle ? Est-elle unique ?

La fonction $x \mapsto e^x$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = +\infty$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, pour tout réel $a \in]0; +\infty[$, il existe un unique réel x tel que $e^x = a$. □

■ **Exemple 1 :** $\ln(1) = 0$. En effet, l'unique solution de l'équation $e^x = 1$ est $x = 0$. ■

■ **Exemple 2 :** $\ln(e) = 1$, $\ln(e^2) = 2$. ■

Propriété 1 : Pour tout réel $a > 0$, $e^{\ln(a)} = a$.
Pour tout réel a, $\ln(e^a) = a$.

Démonstration 1.2 : Soit a un réel strictement positif. $\ln(a)$ est, par définition, solution de l'équation $e^x = a$. On a donc $e^{\ln(a)} = a$.

Par ailleurs, pour tout réel a, $e^a > 0$. Par définition du logarithme népérien, $\ln(e^a)$ est l'unique solution de l'équation $e^x = e^a$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Or, $x = a$ est une solution de cette équation. On a donc $\ln(e^a) = a$. □

■ **Exemple 3 :** On cherche à résoudre l'équation $3e^x - 6 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Or, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$3e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3e^x = 6 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$$

■

2 Propriétés algébriques

Propriété 2 : Soit a et b des réels strictement positifs.

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$
- Pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n\ln(a)$

Démonstration 2.1 : Soit a et b des réels strictement positifs.

- $e^{\ln(ab)} = ab = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$. En appliquant ln à cette égalité, on a donc $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
- Puisque $\ln(1) = 0$, on a $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = 0$, c'est-à-dire $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ et donc $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- Puisque pour tout réel $a > 0$, $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$, on a $\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2\ln(\sqrt{a})$ et donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.
- Pour tout entier naturel n, on pose $\mathcal{P}(n)$ la proposition $\ln(a^n) = n\ln(a)$
  - **Initialisation** : $\ln(a^0) = \ln(1) = 0$ et $0 \times \ln(a) = 0$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
  - **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
    Alors $\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln(a) = n\ln(a) + \ln(a) = (n+1)\ln(a)$. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : $\mathcal{P}$ est héréditaire.
  - **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

  Par ailleurs, pour tout entier naturel n, $a^n \times a^{-n} = a^0 = 1$. Ainsi, $\ln(a^n \times a^{-n}) = \ln(a^n) + \ln(a^{-n}) = 0$. Or, $\ln(a^n) = n\ln(a)$. On a donc $\ln(a^{-n}) = -n\ln(a)$.

□

■ **Exemple 4 :**

$$\begin{aligned} \ln(12) + \ln(3) - 2\ln(6) &= \ln(12 \times 3) - 2\ln(6) \\ &= \ln(36) - 2\ln(6) \\ &= \ln(6^2) - 2\ln(6) \\ &= 2\ln(6) - 2\ln(6) = 0 \end{aligned}.$$

■

3 Fonction logarithme népérien

3.1 Dérivabilité

Définition 2 : On appelle fonction logarithme népérien la fonction $x \mapsto \ln(x)$ définie pour tout réel x strictement positif.

Propriété 3 : La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

R La fonction ln est donc également continue sur $]0;+\infty[$.

Démonstration 3.1 — Au programme. : On admet que ln est dérivable sur $]+;+\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = e^{\ln(x)}$. f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
- D'une part, on sait que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1$.
- D'autre part, en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction composée, on sait que $f'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln(x)} = \ln'(x) \times x$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) \times x = 1$ et donc $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ □

■ **Exemple 5 :** Pour tour réel $x > 0$, on pose $f(x) = e^{x^2-1}\ln(x)$
- Pour tout réel x, on pose $u(x) = e^{x^2-1}$. u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $u'(x) = 2x\,e^{x^2-1}$
- Pour tout réel x, on pose $v(x) = \ln(x)$. v est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $v'(x) = \frac{1}{x}$

Ainsi, f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus, pour tout réel $x>0$

$$f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)=2x\,e^{x^2-1}\ln(x)+\frac{e^{x^2-1}}{x}=\left(\frac{2x^2\ln(x)+1}{x}\right)e^{x^2-1}$$

■

Propriété 4 : Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout réel $x\in I$, $u(x)>0$. alors $\ln(u)$ est dérivable et

$$(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$$

■ **Exemple 6 :** Pour tout réel x, on pose $u(x)=x^2-2x+5$ et $f(x)=\ln(u(x))=\ln(x^2-2x+5)$

- Il faut vérifier que pour tout réel x, $u(x)>0$. C'est une fonction polynôme du second degré dont le discriminant Δ vaut $(-2)^2-4\times1\times5=-16>0$. Ainsi, pour tout réel x, $u(x)$ est du signe du coefficient dominant, 1, c'est-à-dire $u(x)>0$.
- Pour tout réel x, on pose alors $u(x)=x^2-2x+5$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x)=2x-2$.
- Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{2x-2}{x^2-2x+5}$$

■

3.2 Etude de la fonction $\ln$

Propriété 5 : La fonction ln est strictement croissante et concave sur $]0;+\infty[$.

Démonstration 3.2 : La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ qui est strictement positif. ln est donc strictement croissante.

De plus, $\ln'$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel x, $\ln''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ qui est négatif. ln est donc concave sur $]0;+\infty[$. □

Propriété 6 : Soit x un réel strictement positif. $\ln(x)\geqslant0$ si et seulement si $x\geqslant1$

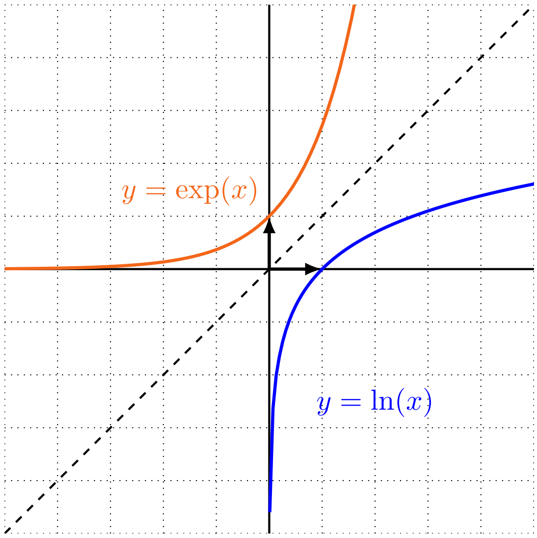
■ **Exemple 7 :** On souhaite déterminer l'entier n à partir duquel $1.2^n\geqslant10$

Puisque la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, $1.2^n\geqslant10$ si et seulement si $\ln(1.2^n)\geqslant\ln(10)$, soit $n\ln(1.2)\geqslant\ln(10)$. Puisque $1.2>1$, alors $\ln(1.2)\geqslant\ln(1)=0$. On peut donc diviser par $\ln(1.2)$ qui est strictement positif sans changer le sens de l'inégalité.

On a donc $n\geqslant\dfrac{\ln(10)}{\ln(1.2)}\simeq12.6$. Le premier entier n tel que $1.2^n\geqslant10$ est donc $n=13$. ■

R C'est une méthode dont il faudra se souvenir pour d'éventuels exercices sur des suites...

Propriété 7 : La courbe de la fonction ln est symétrique à la courbe de la fonction exp par rapport à la droite d'équation $y = x$.



3.3 Limites

Propriété 8 : On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

De plus, pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad \text{et} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

La puissance de x l'emporte sur le logarithme en cas d'indéterminée : ce sont les croissances comparées au logarithme.

Démonstration 3.3 — Au programme : $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln(x)$. : Pour $x > 0$, posons $X = \ln(x)$.

Ainsi, $x \ln(x) = Xe^X$. Or, lorsque x tend vers $-\infty$, $\ln(x)$ tend vers 0. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} Xe^X$ qui vaut 0 par croissances comparées. □