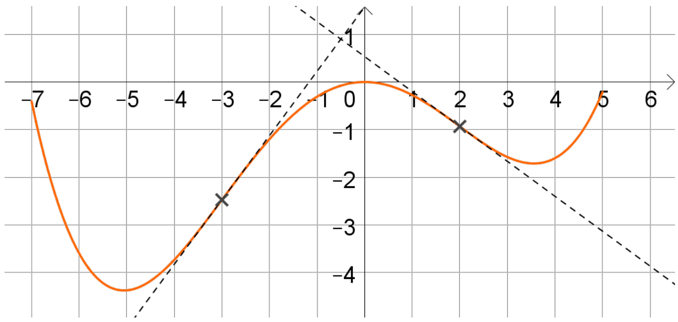
Exercices : Dérivation

1 Convexité

► **Exercice 1 :** Vrai ou faux ? Une fonction convexe est nécessairement croissante.

► **Exercice 2 :** On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé. Les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisse -3 et 2 sont également tracées



1. Quel est le signe de $f'(-6)$? de $f'(4)$?
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe.

2 Convexité des fonctions dérivables

► **Exercice 3 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. Soit a un réel strictement positif.

1. Montrer que pour tout réel strictement positif x,
$$f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a)) = \frac{(a-x)^2}{a^2x}$$
2. La fonction f est-elle convexe ou concave sur $]0;+\infty[$?

► **Exercice 4 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$. Soit a un réel strictement positif.

1. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
2. Résoudre l'équation $-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}x + \sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{a}}{2} = 0$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$. On pourra utiliser le changement de variable $X = \sqrt{x}$
3. La fonction f est-elle convexe ou concave sur $]0;+\infty[$?

► **Exercice 5 :** Soit a et b deux réels. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est également convexe sur $\mathbb{R}$.

► **Exercice 6 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0;+\infty[$.

1. Sur quel domaine f est-elle dérivable ? deux fois dérivable ?
2. Pour tout réel x dans ce domaine, déterminer une expression de $f'(x)$ et de $f''(x)$
3. f est-elle convexe ou concave sur $[0;+\infty[$?
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
5. En déduire que pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} \leqslant \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

▶ **Exercice 7 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

1. Pour tout réel x, déterminer $f''(x)$
2. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.
3. La fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, en quelle abscisse ?

▶ **Exercice 8 :** Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$

1. La fonction f est-elle convexe ou concave sur $[0;+\infty[$?
2. En utilisant la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0, montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
3. Quelle inégalité a-t-on redémontré ?

▶ **Exercice 9 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3x + 1$. La fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ?

3 Exercices de synthèse

▶ **Exercice 10 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[2;8]$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[2;8]$, $f'(x) = \dfrac{-10x + 32}{x^3}$
   (b) Etudier le signe de f' sur l'intervalle $[2;8]$.
   (c) En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2;8]$.
2. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[2;8]$, $f''(x) = \dfrac{20x - 96}{x^4}$
   (b) Déterminer sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
   (c) Montrer que le point de $\mathcal{C}_f$ d'absisse $4,8$ est un point d'inflexion de f.

▶ **Exercice 11 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - 2x - 3}{2}\right)^2$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$
3. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $f''(x)$ pour tout réel x.
4. En déduire les intervalles où la fonction f est convexe.
5. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

▶ **Exercice 12 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1$.

1. Construire le tableau de variations de f
2. Etudier la convexité de la fonction f.

3. En utilisant la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2, montrer que pour tout $x > 0$, $x^3 - 2x^2 > 4x - 8$

► **Exercice 13 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}$$

La courbe représentative de f dans un repère orthogonal sera notée $\mathcal{C}_f$.

1. Déterminer les limites éventuelles de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tends vers $-\infty$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
3. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
4. Justifier que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel x,

$$f''(x) = (16x^2 - 32x + 12)e^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}$$

5. En déduire les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des points d'inflexion ?
6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en chacun des points d'inflexion.
7. Montrer que pour tout réel x, $f(2-x) = f(x)$. Comment interpréter cette propriété ?
8. Représenter l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal.