Exercices : Logarithme

1 Logarithme népérien

▶ **Exercice 1 :** Résoudre les équations suivantes en précisant leur domaine de résolution.

$\ln(x) = 2$ $\quad$ $\ln(3x-4) = 0$ $\quad$ $e^{3x+2} = 4$

$2 + 3\ln(3x-2) = -1$ $\quad$ $\ln(e^{3x+4}) = 5$ $\quad$ $e^{x^2} = 7$

$(e^{2x+1} - 3)(3x-7)(e^x+5) = 0$ $\quad$ $(\ln(x))^2 - \ln(x) = 0$

▶ **Exercice 2 :** En utilisant un changement de variable, résoudre l'équation $3e^{2x} + 9e^x - 30 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

▶ **Exercice 3 :** Pour tout réel x, on pose $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Cette quantité est appelée cosinus hyperbolique de x.

1. Justifier que ch est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $ch''(x) = ch(x)$
2. En déduire la convexité de la fonction ch.
3. Pour tout réel $x \geqslant 1$, on pose $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
   (a) Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $ch \circ f(x) = x$
   (b) On admet que pour tout réel x, $ch(x) \geqslant 1$. Montrer que $f \circ ch(x) = x$.

2 Propriétés algébriques

▶ **Exercice 4 :** Simplifier les écritures suivantes

$\ln(3) + \ln(4) - \ln(6)$ $\quad$ $\dfrac{\ln(9)}{\ln(3)} - \ln(1)$

$4\ln(3) - \ln(9) + 2\ln(27)$ $\quad$ $\ln(3x^2) - \ln(3)$ avec $x > 0$

▶ **Exercice 5 :** Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x > 0$

$$\ln(4x^2) + 6\ln(x) - 3 = 0$$

▶ **Exercice 6 :** Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln(x^2-1) - \ln(x^2+2x+1) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

▶ **Exercice 7 :** Que vaut $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) + \ldots + \ln\left(\dfrac{49}{50}\right)$?

▶ **Exercice 8 :** Montrer que pour tout réel x, $\ln(1 + e^{-x}) = \ln(1 + e^x) - x$.

3 Fonction logarithme népérien

► **Exercice 9 :** Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{x + 5\ln(x)}{5}$

1. Calculer $f(1)$ et $f(e)$
2. En déduire que l'équation $f(x) = 1$ possède au moins une solution sur $[1; e]$. Donner une valeur approchée d'une telle solution à 10^{-2} près.

► **Exercice 10 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa dérivée
2. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On admet pour le moment que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
3. Déterminer les équations des tangentes à la courbe de f aux abscisses 1 et -1
4. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée seconde.
5. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est-elle convexe ?
6. Esquisser l'allure de la courbe de f dans un repère orthogonal.

► **Exercice 11 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(e^x - 1)$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Justifier que f est dérivable sur son domaine de définition et calculer $f'(x)$ pour tout réel x dans ce domaine.
3. Quel est le sens de variations de la fonction f ?

► **Exercice 12 :** Justifier que pour tout entier naturel n, $\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) < 0$.

► **Exercice 13 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée f'.
3. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ en incluant les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f.

► **Exercice 14 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Cette fonction, utilisée en intelligence artificielle, est appelée fonction SoftPlus.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée f'.
3. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ en incluant les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f.
4. Pour tout réel x, on pose $g(x) = f(x) - x$
   (a) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$ en incluant les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) En déduire que pour tout réel x, $f(x) \geqslant x$
5. Construire l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

► **Exercice 15 :** En utilisant la concavité de la fonction ln et la tangente à la courbe de la fonction ln au point d'abscisse 1, montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$

▶ **Exercice 16 :** A l'aide du logarithme, déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant les conditions suivantes

$$2^n \geqslant 40000 \qquad 1.01^n \geqslant 2 \qquad 0.7^n \leqslant 10^{-3}$$

▶ **Exercice 17 :** La population d'une ville augmente de 3% chaque année. Après combien d'année cette population aura-t-elle doublé ?

▶ **Exercice 18 :** Existe-t-il un réel x tel que $e^{x^2} = \dfrac{1}{2}$?

▶ **Exercice 19 :** Dans chacun des cas, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a

1. $f(x) = \ln(1-x)$ en $a = -\infty$
2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right)$ en $a = 0+$ et en $a = +\infty$
3. $f(x) = 2x^2\ln(x)$ en $a = 0^+$ et en $a = +\infty$
4. $f(x) = \ln(e^x - x)$ en $a = +\infty$ et en $a = -\infty$

▶ **Exercice 20 :** Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = x - \ln(x)$

1. Construire le tableau de variations de f en faisant apparaître les limites la fonction en $0+$ et $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $x = 2 + \ln(x)$ possède exactement 2 solutions sur $]0;+\infty[$.

4 Exercices de synthèse

▶ **Exercice 21 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = e^3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n, $e^2 \leqslant u_n$
2. En déduire que (u_n) converge. Quelle est sa limite ?
3. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \ln(u_n) - 2$
   (a) Exprimer u_n en fonction de a_n pour tout entier naturel n.
   (b) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n pour tout entier naturel n.
   (c) Quelle est la nature de la suite (a_n) ? On précisera sa raison et son premier terme.
   (d) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = \exp\left(2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$
   (e) Retrouver la limite de la suite (u_n) à l'aide de cette expression.

▶ **Exercice 22 :** On considère la fonction $x \mapsto \ln(x^2+2x-3)$

1. Déterminer le domaine de définition D de f
2. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$, $+\infty$, 1^+ et $(-3)^-$.
3. Justifier que f est dérivable sur D et donner une expression de $f'(x)$ pour tout x dans D.
4. En déduire le tableau de variations de f
5. Montrer que f est convexe sur chaque intervalle de D.
6. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

► **Exercice 23 :** Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ et $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.

1. Quelle est la limite de la suite (u_n) en $+\infty$?
2. Montrer que $S_3 = -\ln(4)$
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $S_n = -\ln(n+1)$
4. En déduire la limite de la suite (S_n) en $+\infty$

► **Exercice 24 — Logarithme décimal et applications. :** Soit a un réel strictement positif et x un réel. On appelle exponentielle de x en base a le réel noté a^x et qui vaut $e^{x\ln(a)}$.

1. Soit b un réel strictement positif. Montrer que l'unique solution de l'équation $a^x = b$ est $x = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$. Ce nombre est appelé le logarithme de b en base a.

La base la plus couramment utilisée est la base 10 ; le logarithme en base 10 est alors noté log. Ainsi, pour tout réel a strictement positif, $\log(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(10)}$ et $\log(a)$ est l'unique solution de l'équation $10^x = a$.

2. En chimie, le pH d'une solution vaut $-\log(C)$ où C est la concentration de cette solution en ions hydronium H_3O^+, exprimée en mol.L^{-1}
   (a) Quel est le pH d'une solution ayant une concentration en ions hydronium de 10^{-4} mol.l^{-1} ?
   (b) Si le pH baisse de 1, par combien a été multipliée la concentration en ion hydronium ?
   (c) Le cola a un pH de 2.5. Quelle est sa concentration en ions hydronium ?
   (d) On dit qu'une solution est basique si son pH est strictement supérieur à 7. A quelles concentrations cette situation correspond-elle ?
3. Le niveau de bruit d'une source sonore se mesure en décibels. La formule qui donne le niveau de bruit N en fonction de l'intensité I de la source, exprimée en W.m^{-2} est $N = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ avec $I_0 = 10^{-12}$ W.m^{-2}
   (a) Quelle est l'intensité sonore d'une avion qui décolle avec un niveau de bruit de 120 dB ?
   (b) De combien de décibels le niveau sonore augmente-t-il lorsque l'intensité sonore double ?
   (c) Une cri possède un niveau sonore de 80 dB. On admet que quand plusieurs personnes crient, les intensités s'ajoutent. Combien doit-on réunir de personnes pour que leurs cris réunis aient une intensité sonore de 120 dB ?

D'autres exemples d'échelle logarithmique : l'échelle de Richter, magnitude des étoiles, spectre sonore... *Ca pourrait faire des sujets de grand oral...*