Primitives, équations différentielles

1 Notion d'équation différentielle

► **Exercice 1 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = e^{3x} + 1$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = 3y - 3$.

► **Exercice 2 :** Pour tout réel $x \neq -1$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1+x)y' + y = 0$.

► **Exercice 3 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = y(1-y)$

► **Exercice 4 :** Montrer que les fonctions $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto xe^x$ sont solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.

2 Primitives

► **Exercice 5 :** Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que f est une primitive de ln sur $]0; +\infty[$.

► **Exercice 6 :** Pour tout réel x, on pose $F(x) = (2x+1)e^{x^2-1}$ et $f(x) = (4x^2+2x+2)e^{x^2-1}$. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

► **Exercice 7 :** Pour tout réel x, on pose $F(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puis déterminer l'unique primitive F_0 de f telle que $F_0(0) = 0$.

► **Exercice 8 :** Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $f_1 : x \mapsto x^5 + x^4 - x^3 + x - 1$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$.
3. $f_3 : x \mapsto 7x^6 + 8e^{4x+2} - \dfrac{1}{x^3}$ sur $I =]-\infty; 0[$
4. $f_4 : x \mapsto 4x^4 + 3x^2 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{4}{x^7}$ sur $I =]-\infty; 0[$
5. $f_5 : x \mapsto 3e^{5x+2}$ sur $I = \mathbb{R}$
6. $f_6 : x \mapsto e^{3x} + x^4 - \dfrac{1}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$
7. $f_7 : x \mapsto \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{5}{x^4}$ sur $I =]0; +\infty[$.

▶ **Exercice 9 :** Pour tout réel x différent de 1 et -3, on pose $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+3)}$

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel x différent de 1 et -3, $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+3}$
2. En déduire une primitive de f sur $]1;+\infty[$.

▶ **Exercice 10 :** Donner une primitive des fonctions suivantes en reconnaissant la primitive d'une fonction composée

- $f_1 : x \mapsto \dfrac{3x^2+4x}{x^3+2x^2-5}$ sur $[2;+\infty[$
- $f_2 : x \mapsto \dfrac{-10x}{(5x^2+7)^2}$ sur $\mathbb{R}$
- $f_3 : x \mapsto -\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$
- $f_4 : x \mapsto xe^{x^2-5}$ sur $I = \mathbb{R}$
- $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $I =]1;+\infty[$
- $f_6 : x \mapsto \dfrac{4x^3-6x}{x^4-3x^2+5}$ sur $\mathbb{R}$
- $f_7 : x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$
- $f_8 : x \mapsto \dfrac{-2x-5}{x^4+10x^3+25x^2}$ sur $]0;+\infty[$

▶ **Exercice 11 :** Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique primitive F de la fonction f sur l'intervalle I qui respecte la condition initiale indiquée.

1. $f : x \mapsto 6x^2 - 4x + 1$, sur $I = \mathbb{R}$ avec $F(3) = 2$
2. $f : x \mapsto \dfrac{2}{x^2} + 3x$ sur $I =]0;+\infty[$ avec $F(1) = 3$
3. $f : x \mapsto x^2e^{x^3}$ sur $I = \mathbb{R}$ avec $F(0) = 3$

▶ **Exercice 12 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = (-3x^2 + 2x + 12)e^{1-3x}$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{1-3x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$
2. En déduire l'unique primitive F de f telle que $F(2) = 4$.

3 Équations différentielles du premier ordre

▶ **Exercice 13 :** Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique solution f de l'équation différentielle donnée telle que $f(x_0) = y_0$

1. $y' = 8y$ avec $x_0 = -2$ et $y_0 = -7$
2. $y' = 2y$ avec $x_0 = 2$, $y_0 = 3$
3. $y' = -4y$ avec $x_0 = -1$, $y_0 = -5$
4. $y' + 7y = 0$ avec $x_0 = 0$, $y_0 = 2$
5. $3y' + 2y = 0$ avec $x_0 = 1$, $y_0 = 3$
6. $y' - 9y = 0$ avec $x_0 = 47$, $y_0 = 0$

► **Exercice 14 :** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = 4y+1$. Déterminer l'unique solution f_0 de cette équation telle que $f_0(3) = 5$.

► **Exercice 15 — En physique / SVT. :** Certaines proportions de protons et neutrons dans le noyau d'un atome ne permettent pas la stabilité du noyau. Le noyau est alors dit radioactif. Les noyaux instables se désintègrent spontanément mais on ne peut prévoir à quel instant. Néanmoins, sur des échantillons comportant de très nombreux noyaux radioactifs, on sait que la variations de noyaux radioactifs est proportionnelle au nombre de noyaux présents au temps t.

On note N_0 le nombre initial de noyaux radioactifs d'un échantillon et $N(t)$ le nombre de noyaux au temps t. Il existe alors un réel k tel que pour tout réel $t > 0$, $N'(t) = kN(t)$. Cette constante k dépend de l'élément chimique étudiée.

1. En résolvant cette équation différentielle, déterminer l'expression de $N(t)$.
2. On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps τ nécessaire pour que la moitié des noyaux radioactifs se désintègre.
   (a) Exprimer τ en fonction de k
   (b) La demi-vie du carbone 14 est de 5730 ans. Donner une valeur approchée de la constante k en années^{-1}.
3. Le 19 septembre 1991, des explorateurs trouvent la momie d'un homme piégée dans la glace à 3000 m d'altitude. A l'aide de mesures, on estime que 47% des atomes de carbone 14 de son corps se sont alors désintégrés. Donner une estimation de la période durant laquelle a vécu Otzi.

► **Exercice 16 :** Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique solution f de l'équation différentielle donnée telle que $f(x_0) = y_0$

1. $y' = 3y + 2$ avec $x_0 = 3$ et $y_0 = 1$
2. $2y' = 5y - 1$ avec $x_0 = 0$ et $y_0 = 2$
3. $y' - 4y = 8$ avec $x_0 = 11$ et $y_0 = -2$

► **Exercice 17 :** Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''+2y'-3 = 0$

► **Exercice 18 — En physique. :** La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux de perte de chaleur d'un corps est proportionnel à la différence de température entre ce corps et l'environnement.

On place une tasse de thé bouillant dans une pièce où la température est constante, égale à $20°C$. On note $T(t)$ la température du thé après t minutes.

1. D'après la loi de refroidissement de Newton, on a
$$T' = -\frac{\ln(2)}{7}(T - 20)$$
   Résoudre cette équation différentielle sachant que $T(0) = 100$
2. Quelle est la limite de $T(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?
3. Au bout de combien de temps la température du thé sera-t-elle inférieure à $25°C$?

▶ **Exercice 19 — En physique. :** Le condensateur est un composant électronique qui peut stocker des charges électriques sur ses armatures.

On considère un condensateur déchargé de capacité C, monté en série avec un conducteur ohmique de résistance R et une différence de potentiel E. R, C et U sont des réels strictement positifs. On note $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur au temps t.

1. On admet que u vérifie l'équation différentielle $u + RCu' = E$. Exprimer $u(t)$ en fonction de t, R, C et E.
2. Quelle est la limite de $u(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de u à l'abscisse 0.
4. Déterminer le point d'intersection de cette tangente avec la droite d'équation $y = E$. L'abscisse de ce point est appelé "constante de temps" et est notée τ.
5. Montrer que $u(\tau) \simeq 0.63E$.

R Au lieu de noter u' la dérivée de u, les physiciens ont tendance à noter $\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}}$.

▶ **Exercice 20 — En économie. :** On considère le marché d'un lieu imaginaire décrit par une loi d'offre Q_o et une loi de demande Q_d. Si on note $P(t)$ le prix de l'atricle considéré à un instant t, ces offres dynamiques sont modélisées par $Q_o = 5 + 2P + \frac{P'}{3}$ et $Q_d = 10 - \frac{2}{3}P - \frac{5}{3}P'$.

1. Le prix d'équilibre P_{eq} est atteint lorsque $Q_0 = Q_d$. Montrer que P_{eq} est solution de l'équation différentielle $y' = -\frac{4}{3}y + \frac{5}{2}$
2. Exprimer $P_{eq}(t)$ en fonction du temps t et du prix de départ P_0
3. Quelle est la limite de $P_{eq}(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

▶ **Exercice 21 :** On considère l'équation différentielle $y' = 4y + 3x - 1$

- Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
- Montrer que la fonction $v : x \mapsto -\frac{3}{4}x + \frac{1}{16}$ est solution de l'équation différentielle $y' = 4y + 3x - 1$
- En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

▶ **Exercice 22 :** On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$

1. Résoudre l'équation homogène associée $y' + y = 0$
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$ est solution de l'équation (E)
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

▶ **Exercice 23 :** On considère l'équation différentielle $(E) : 2y' + y = (x + 1)e^{-x/2}$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène $2y' + y = 0$
2. Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $f : x \mapsto (ax^2+bx)e^{-x/2}$ soit solution de l'équation (E)
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

4 Exercices de synthèse

▶ **Exercice 24 — Variation de la constante. :** La méthode de la variation de la constante permet de trouver, dans certains cas, une solution particulière à une équation différentielle. Dans cet exercice, on cherche à résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' + y = \frac{1}{1+e^x}$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée $y' + y = 0$.
2. Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$. On cherche alors une fonction C définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f(x) = C(x)e^{-x}$
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ pour tout réel x.
   (b) On rappelle que f est solution de (E). En déduire que $C'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ pour tout réel x.
   (c) Déterminer une fonction C qui convienne.
   (d) Réciproquement, montrer que la fonction f trouvée est bien solution de (E)
3. En déduire l'ensemble des solutions (E).

▶ **Exercice 25 — Modèle de Gompertz. :** Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille. Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t, exprimé en années à partir de l'origine 2000.

D'après le module d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0; +\infty[$ et satisfait l'équation différentielle

$$(E) \, : \, y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln(y))$$

1. Soit f une solution de (E) et $g = \ln(f)$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et exprimer g' en fonction de f' et f.
   (b) Montrer que g est solution de l'équation différentielle $(E') \, : \, y' = \dfrac{1}{20}y - \dfrac{3}{20}$
   (c) Résoudre l'équation (E')
   (d) En déduire qu'il existe un réel C tel quel pour tout réel x,
   $$f(x) = \exp\left(3 + C \, \exp\left(\frac{x}{20}\right)\right)$$
2. Réciproquement, pour C un réel, on considère la fonction $f : x \mapsto \exp\left(3 + C \, \exp\left(\dfrac{x}{20}\right)\right)$. Montrer que f est une solution de l'équation (E).
3. Les conditions initiales conduisent à considérer la fonction f définie pour tout $t > 0$ par
   $$f(t) = \exp\left(3 - 3 \, \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$$

(a) Déterminer la limite de f en $+\infty$
(b) Déterminer le sens de variations de f sur $[0;+\infty[$
(c) Au bout de combien d'années la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à 20 individus ?

▶ **Exercice 26 — Modèle de Verhulst. :** Le parc Kruger est un parc animalier situé en Afrique du Sud. Fondé à la fin du XIXe siècle, celui-ci accueillit notamment une population d'éléphants africains, une espèce menacée d'extinction à cause du braconnage intensif. Le parc accueillait ainsi 10 éléphants en 1905. Les scientifiques ont estimé que la population P au temps t, exprimé en années, vérifiait l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad P' = \frac{3}{20}P - \frac{P^2}{50000}$$

1. Montrer que si à un instant t, la population est en-dessous de 7500, alors celle-ci est croissante.
2. On suppose que la fonction P ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$. On pose alors, pour tout $t \geqslant 0$, $F(t) = \dfrac{1}{P(t)}$
   (a) Exprimer $F'(t)$ en fonction de $P(t)$ et $P'(t)$.
   (b) Montrer que P est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si F est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = -\dfrac{3}{20}y + \dfrac{1}{50000}$
   (c) Résoudre l'équation (E')
   (d) En déduire que l'unique solution de l'équation (E) ayant pour condition initiale $P(0) = 10$ est $P : t \mapsto \dfrac{7500}{1 + 749e^{-0,15t}}$.
3. Déterminer la population limite d'éléphants dans le parc.
4. On admet que pour tout $t \geqslant 0$, $P''(t)$ est du signe de $1 - 749e^{-0.15t}$.
   (a) Déterminer – si elles existent – les coordonnées du point d'inflexion de la courbe représentative de P.
   (b) Justifier la phrase suivante : la croissance de la population s'accélère jusqu'à ce que cette population atteigne la moitié de sa valeur maximale.