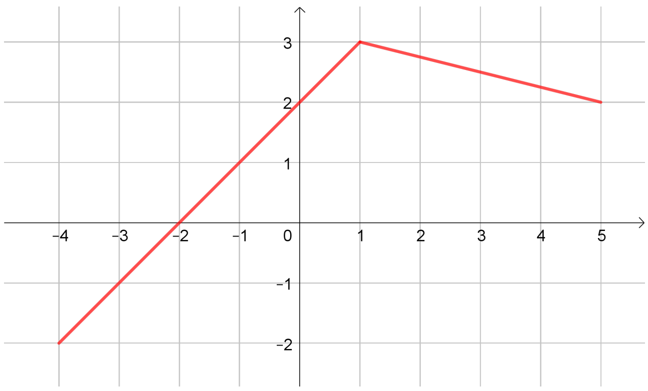
Exercices : Calcul intégral

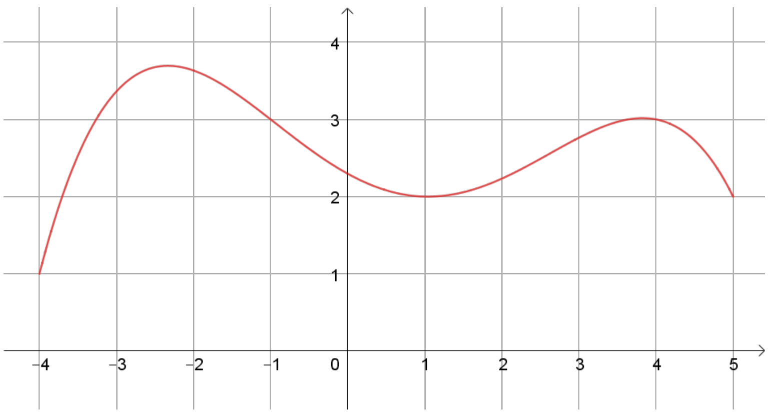
1 Intégrale d'une fonction continue positive

► **Exercice 1 :** On considère une fonction f dont la courbe représentative est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé



Déterminer les valeurs de $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)dx$, $\displaystyle\int_{0}^{5} f(x)dx$, $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{-4}^{5} f(x)dx$

► **Exercice 2 :** On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.



1. Donner un encadrement de $\displaystyle\int_{-4}^{5} f(x)dx$
2. Donner un encadrement de $\displaystyle\int_{1}^{5} f(x)dx$

► **Exercice 3 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = 2x + 8$. Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)dx$.

► **Exercice 4 :** On rappelle que pour tout réel x, $|x| = \max(x, -x)$. Par exemple, $|3| = 3$ et $|-2| = 2$. Déterminer $\displaystyle\int_{-3}^{5} |x|dx$

2 Intégrale et primitives

▶ **Exercice 5 :** Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-5}^{7} \sqrt{2}dx \qquad \int_{3}^{14} \frac{1}{x}dx \qquad \int_{-2}^{4} (x^2+3x+4)dx$$

$$\int_{0}^{10} e^{-5x}dx \qquad \int_{-1}^{1} (x^4-x^2+x-1)dx \qquad \int_{-2}^{2} (8x^5+5x^3+2x)dx$$

$$\int_{0}^{1} e^{2x}dx \qquad \int_{1}^{9} \frac{3}{2\sqrt{x}}dx \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos(2x)-3\sin(5x)\right)dx$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}dx \qquad \int_{3}^{7} \frac{1}{x^2}dx \qquad \int_{1}^{2} \frac{x+1}{x^3}dx$$

▶ **Exercice 6 :** Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-3}^{3} (x^5+2x^3-2x)dx \qquad \int_{-2}^{4} 2xe^{x^2}dx \qquad \int_{0}^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)dx$$

$$\int_{-3}^{3} \cos(x)dx \qquad \int_{0}^{4} \frac{2x}{1+x^2}dx \qquad \int_{-1}^{4} \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}dx$$

$$\int_{-1}^{1} 24x(3x^2+1)^3dx \qquad \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2\sin(x)\cos(x)dx \qquad \int_{-3}^{2} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$$

▶ **Exercice 7 :** Pour tout réel $x > -1$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

1. Montrer que pour tout réel $x > -1$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$
2. En déduire une primitive de f sur $]-1;+\infty[$
3. Calculer alors $\displaystyle\int_{1}^{3} f(x)dx$

▶ **Exercice 8 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x & , \text{ si } x < -1 \\ 2x^3-x+1 & , \text{ si } x \geqslant -1 \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\int_{-4}^{1} f(t)dt$

▶ **Exercice 9 :** Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x}{1+e^x}dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{1+e^x}dx$.

▶ **Exercice 10 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n e^{-x^2}dx$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante
2. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $-x^2 \leqslant -2x+1$ et que $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \dfrac{e}{2}$
4. En déduire que la suite (u_n) converge. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

▶ **Exercice 11 :** Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto 3x+2$ sur $[-2;3]$

▶ **Exercice 12 — En physique. :** Soit f une fonction continue sur un intervalle [a;b]. On appelle valeur efficace de la fonction f est égale à la racine carrée de la valeur moyenne de f^2 sur l'intervalle $[a,b]$

En électricité, la valeur efficace d'un courant ou d'une tension variables au cours du temps correspond à la valeur d'un courant continu ou d'une tension continue qui produirait un échauffement identique dans une résistance.

Dans le cas d'un régime sinusoïdal, l'intensité du courant est donnée par une fonction $i : t \mapsto I_{max}\sin(\omega t)$, où I_{max} est un réel positif et ω désignela pulsation du signal. L'intervalle considérée est l'intervalle $\left[0; \dfrac{2\pi}{\omega}\right]$

1. Montrer que la fonction $x :\mapsto \dfrac{I_{max}^2}{2}\left(x - \dfrac{\sin(\omega x)\cos(\omega x)}{\omega}\right)$ est une primitive de i^2 sur $[0;2\pi]$
2. En déduire que l'intensité efficace d'un tel courant vaut $\dfrac{I_{max}}{\sqrt{2}}$

3 Intégration par parties

▶ **Exercice 13 :** A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(x)dx$. On pourra poser $v(x) = x$ pour tout réel x et déterminer une fonction u telle que $u' = \cos$.

▶ **Exercice 14 :** A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^4 x\ln(x)dx$. On pourra poser $v = \ln$ et déterminer une fonction u tel que pour tout réel x, $u'(x) = x$.

▶ **Exercice 15 :** En utilisant deux intégrations par parties successives, déterminer $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x dx$

▶ **Exercice 16 :** Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x}dx \quad \text{et, si } n \geqslant 1, I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}dx$$

1. Calculer la valeur exacte de I_0
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n,

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$$

3. En déduire les valeurs de I_1 et I_2.

► **Exercice 17 :** On pose $I = \int_0^{\pi} e^x \cos(x)dx$

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^{\pi} e^x \sin(x)dx$
2. A l'aide d'une nouvelle intégration par parties, montrer que $I = e^{\pi} - 1 - I$.
3. En déduire la valeur de I.

4 Exercices de synthèse

► **Exercice 18 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^2 e^{-x}$

1. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On précisera les éventuelles limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Trouver deux réels m et M tels que pour tout réel x, $m \leqslant f(x) \leqslant M$
3. En déduire un encadrement de $\int_0^4 f(x)dx$.
4. Chercher trois réels a, b et c tels que la fonction $x \mapsto (ax^2 + bx + x)e^{-x}$ soit une primitive de f et en déduire la valeur exacte de $\int_0^4 f(x)dx$.
5. Retrouver cette valeur à l'aide de deux intégrations par parties successives

► **Exercice 19 :** Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on considère la fonction f_n définie pour tout réel $x > 0$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}}$$

On cherche à déterminer la limite de la suite (I_n) définie pour tout entier $n \geqslant 2$ par

$$I_n = \int_1^2 f_n(x)dx$$

1. Calculer I_2
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$$

3. Calculer I_3
4. On souhaite alors déterminer la limite de la suite (I_n). Soit donc n un entier supérieur ou égal à 2.
   (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1;2]$, on a

   $$0 \leqslant \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{e}{x^n}$$

   (b) En déduire un encadrement de I_n puis déterminer l'éventuelle limite de la suite (I_n).