

# 1. Exercices

## Opérations sur les variables aléatoires

### ► Exercice 1 – Voir le corrigé

On considère la variable aléatoire  $X$  dont la loi est résumée dans le tableau suivant.

$k$	-3	-1	2	4
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	...

1. Compléter ce tableau avec la probabilité manquante.
2. Donner la loi de la variable aléatoire  $Y = X + 2$ .
3. Donner la loi de la variable aléatoire  $Z = 2X - 1$ .

### ► Exercice 2 – Voir le corrigé

Une entreprise commercialise des lave-vaisselles et propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires au prix de 65 euros. Si une panne irréparable survient au cours de cette période, l'entreprise remboursera alors les 399 euros correspondant au prix du lave-vaisselle. D'après les statistiques relevées par l'entreprise, 11,5% des lave-vaisselles tombent en panne durant cette période de 3 ans. Un client achète un lave-vaisselle avec extension de garantie.

1. On note  $X$  la variable aléatoire qui vaut 1 si le lave-vaisselle tombe en panne durant la période concernant l'extension de garantie et 0 sinon. Quelle est la loi de  $X$  ?
2. On note  $Y$  le gain réalisée par l'entreprise grâce à l'extension de garantie. Exprimer  $Y$  en fonction de  $X$ .

### ► Exercice 3 (Asie 2022) – Voir le corrigé

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking. Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5% de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.

Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
2. Calculer  $\mathbb{P}(X \leq 200)$  et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros. Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.

On appelle  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet et  $C$  la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol. On admet que  $Y$  suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant.

$k$	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(Y = k)$	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	

- (a) Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus.
- (b) Exprimer  $C$  en fonction de  $Y$  puis donner la loi de la variable aléatoire  $C$  sous forme d'un tableau.
- (c) Calculer l'espérance de  $C$  à l'euro près.

- (d) Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

► **Exercice 4 – Voir le corrigé**

On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  indépendantes dont les lois sont résumées dans les tableaux suivants.

$k$	1	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\dots$

et

$k$	1	2	3
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\dots$

1. Compléter ces tableaux avec les probabilités manquantes.
2. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire  $Z = 2X$ .
3. Que vaut  $\mathbb{P}(X + Y = 5)$  ?
4. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire  $W = X + Y$
5. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire  $A = 3X - 2Y$ .

► **Exercice 5 – Voir le corrigé**

On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  indépendantes dont les lois sont résumées dans les tableaux suivants.

$k$	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

et

$k$	1	4	5
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire  $X + Y$ .
2. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire  $2X + 3Y$ .

## Espérance et variance d'une somme de variables

► **Exercice 6 – Voir le corrigé**

On considère les deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  de l'exercice précédent.

1. Calculer l'espérance et la variance de  $X$  et de  $Y$ .
2. En déduire l'espérance et la variance de  $3X + 2$ , de  $X + Y$  et de  $5X - 2Y$ .

► **Exercice 7 – Voir le corrigé**

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoire indépendantes telles que  $E(X) = 3$ ,  $E(Y) = -5$ ,  $V(X) = 1$  et  $V(Y) = 2$ .

1. On considère la variable aléatoire  $Z_1 = 2X + 3Y$ . Donner l'espérance et la variance de  $Z_1$
2. On considère la variable aléatoire  $Z_2 = 4X - 2Y$ . Donner l'espérance et la variance de  $Z_2$ .
3. On considère la variable aléatoire  $Z_3 = 3Y - 2X + 7$ . Donner l'espérance et la variance de  $Z_3$ .

► **Exercice 8 – Voir le corrigé**

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  est centrée réduite si son espérance est nulle et sa variance vaut 1.

Montrer que pour toute variable aléatoire  $X$  non constante et admettant une espérance et une variance, la variable

---

$Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$  est centrée réduite.

**► Exercice 9 (Centres étrangers 2024) – Voir le corrigé**

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.

À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.

Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.

Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est (4 ; 5 ; 1).

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. (a) Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.  
(b) En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

On note  $X_1$  la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché,  $X_2$  celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et  $X_3$  celle égale au numéro du troisième jeton pioché.

Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X_1$ .
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire  $X_1$ .

On note  $S = X_1 + X_2 + X_3$  la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire  $S$ .
6. Déterminer  $\mathbb{P}(S = 24)$ .
7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.  
(a) Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.  
(b) En déduire la probabilité de gagner un lot.

**► Exercice 10 – Voir le corrigé**

On lance trois pièces de monnaies et on regarde sur quels côtés elles tombent.

1. On note  $X$  le nombre de FACE obtenus. Construire le tableau résumant la loi de  $X$ .
2. On note  $Y$  la variable aléatoire qui vaut 1 si les trois pièces tombent du même côté et 0 sinon.  
(a) Quelle est la loi de  $Y$ ? On précisera la valeur du ou des paramètres(s).  
(b) Que vaut l'espérance de  $Y$ ?
3. Le jeu consiste à miser deux euros. Si les trois pièces tombent sur les mêmes faces, on reprend sa mise et on remporte cinq euros supplémentaires. Sinon, on perd la mise. On note  $Z$  la variable aléatoire qui détermine le gain algébrique du joueur.  
(a) Justifier que  $Z = 7Y - 2$   
(b) En déduire l'espérance de  $Z$ . Ce jeu est-il équitable?

**► Exercice 11 – Voir le corrigé**

Une urne contient 100 jetons parmi lesquels 10 sont gagnants. Pour jouer à la loterie, un joueur doit payer 10 euros et tire au hasard et successivement deux jetons, en remettant entre temps le jeton tiré. Chaque jeton gagnant tiré lui rapporte 20 euros.

1. On note  $X$  le nombre de jetons gagnants tirés. Quelle est la loi de  $X$ ?
2. Que vaut l'espérance de  $X$ ?
3. On note  $Y$  le gain algébrique d'un joueur. Expliquer pourquoi  $Y = 20X - 10$ .
4. En déduire l'espérance de  $Y$ . Ce jeu est-il équitable?

► **Exercice 12 – Voir le corrigé**

On considère les deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  indépendantes dont les lois sont données ci-dessous.

$k$	2	1	-1
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$

et

$k$	1	2	-2
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

1. Donner l'espérance et la variance des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .
2. On propose le jeu suivant : 8 boules sont dans une urne. On mise un euro et on tire une de ces boules au hasard. 5 sont perdantes, 2 font gagner 2 euros et 1 fait gagner 3 euros. Quelle variable aléatoire permet de modéliser ce jeu ?
3. Le jeu est-il avantageux pour le joueur ?
4. Proposer une expérience aléatoire correspondant à la variable aléatoire  $Y$ .
5. On réalise deux fois le jeu correspondant à la variable  $X$  et trois fois celui correspondant à la variable  $Y$ . On note  $Z$  le gain algébrique de cette succession de jeu. Sans déterminer précisément la loi de  $Z$ , dire si ce jeu est avantageux pour le joueur ou non.

► **Exercice 13 – Voir le corrigé**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale. On suppose que  $E(X) = 6$  et  $V(X) = 4$ . Retrouver les paramètres de la loi binomiale.

► **Exercice 14 – Voir le corrigé**

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi binomiale  $\mathcal{B}(10; 0, 3)$  et  $Y$  une variable aléatoire suivant une loi binomiale  $\mathcal{B}(8; 0, 2)$ . On suppose que  $X$  et  $Y$  sont des variables indépendantes.

1. Donner les espérances et variances de  $X$  et  $Y$ . Donner leur écart-type arrondi au millième.
2. Donner l'espérance, la variance et l'écart-type arrondi au millième de la variable aléatoire  $Z$  définie par  $Z = 2X - 3Y$ .

► **Exercice 15 – Voir le corrigé**

On range  $n$  objets dans une commode contenant  $n$  tiroirs, chaque objet étant placé uniformément au hasard et indépendamment des autres objets dans l'un de ces tiroirs. L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre moyen de tiroirs vides à l'issue de cette expérience.

**Partie A : Étude de cas particuliers**

1. On suppose qu'il y a 2 tiroirs et 2 objets à ranger.
  - (a) On note  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de tiroirs vides à l'issue du rangement des 2 objets. Construire le tableau donnant la loi de  $X$
  - (b) En déduire l'espérance de  $X$ .
2. On suppose qu'il y a 3 tiroirs et 3 objets à ranger dans la commode. Un rangement peut alors être assimilé à un 3-uplet de  $\{1; 2; 3\}$ . Par exemple, le 3-uplet  $(2; 1; 2)$  signifie que le premier objet est rangé dans le tiroir 2, le deuxième objet dans le tiroir 1 et le troisième objet dans le tiroir 2.
  - (a) Combien de rangements différents peut-on effectuer ?
  - (b) Combien de rangements laissant le tiroir 1 vide peut-on effectuer ?
  - (c) Pour  $k \in \{1; 2; 3\}$  on note  $X_k$  la variable aléatoire qui vaut 1 si le tiroir  $k$  est vide et 0 sinon. Quelle est la loi de  $X_1$  ?
  - (d) On considère la variable aléatoire  $X = X_1 + X_2 + X_3$ . Que vaut  $E[X]$  ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

**Partie B : Cas général**

On dispose désormais de  $n$  objets que l'on répartit uniformément au hasard et de manière indépendante dans les  $n$  tiroirs.

1. Pour  $k \in \{1; 2; \dots; n\}$  on note  $Y_k$  la variable aléatoire qui vaut 1 si le tiroir  $k$  est vide et 0 sinon.  
Montrer que l'espérance de  $Y_1$  vaut  $\frac{(n-1)^n}{n^n}$ .
2. En déduire le nombre moyen de tiroirs vides à l'issue de cette expérience.

**Loi des grands nombres****► Exercice 16 – Voir le corrigé**

Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance 4 et de variance 2. On considère un échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  de variables aléatoires indépendantes de même loi que  $X$  et on note  $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ .

1. Donner l'espérance et la variance de  $M_n$ .
2. Pour quelle valeur de  $n$  la variance de  $M_n$  est-elle inférieure à  $10^{-4}$  ?

**► Exercice 17 – Voir le corrigé**

Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance 4 et de variance 1.

1. Traduire l'inégalité  $|X - 4| \geq 2$  en terme d'intervalle.
2. Donner une minoration de  $\mathbb{P}(X \in ]2; 6[)$ .

**► Exercice 18 – Voir le corrigé**

Soit  $X$  une variable aléatoire non constante. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Thecbychev, minorer les probabilités  $\mathbb{P}(|X - E(X)| < 2\sigma(X))$  et  $\mathbb{P}(|X - E(X)| < 3\sigma(X))$ .

**► Exercice 19 – Voir le corrigé**

En 2018, le trafic moyen quotidien de véhicules sur le réseau autoroutier s'élevait à 24000 voitures, avec une variance de 6000. Majorer la probabilité que l'écart entre le nombre de véhicules en circulation lors d'une journée prise au hasard et la moyenne de véhicules recensés soit supérieure ou égal à 1000, puis à 100.

**► Exercice 20 (Métropole 2024, Jour 1 Bis) – Voir le corrigé**

Un client arrive à une station-service et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.

On désigne par  $T_1, T_2, T_3$  les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.

On suppose que  $T_1, T_2, T_3$  sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.

On note  $S$  la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. Exprimer  $S$  en fonction de  $T_1, T_2$  et  $T_3$ .
2. (a) Déterminer l'espérance de  $S$  et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.  
(b) Quelle est la variance du temps d'attente total  $S$  de ce troisième client ?
3. Montrer que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

► **Exercice 21 (Métropole 2024, jour 2) – Voir le corrigé**

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude. On interroge au hasard dix étudiants. Les variables aléatoires  $N_1, N_2, \dots, N_{10}$  modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres  $(20; 0,615)$ .

Soit  $S$  la variable définie par  $S = N_1 + N_2 + \dots + N_{10}$ .

1. Calculer l'espérance  $E(S)$  et la variance  $V(S)$  de la variable aléatoire  $S$ .
2. On considère la variable aléatoire  $M = \frac{S}{10}$ .
  - (a) Que modélise cette variable aléatoire  $M$  dans le contexte de l'exercice ?
  - (b) Justifier que  $E(M) = 12,3$  et  $V(M) = 0,47355$ .
  - (c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.  
« La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 »

► **Exercice 22 – Voir le corrigé**

On jette 3600 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On note  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de 1 obtenus.

1. Quelle est la loi de  $X$  ? Quelle est son espérance ? sa variance ?
2. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

► **Exercice 23 – Voir le corrigé**

Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance 5 et de variance 2. On considère un échantillon  $(X_1, \dots, X_{100})$  de variables aléatoires indépendantes de même loi que  $X$  et on note  $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ .

1. Soit  $\delta$  un réel strictement positif et  $n$  un entier naturel non nul.  
Écrire l'inégalité de concentration pour  $M_n$ .
2. En déduire l'entier  $n$  à partir duquel on a  $\mathbb{P}(|M_n - 5| \geq 0,05) \leq 0,01$ .

► **Exercice 24 – Voir le corrigé**

Une compagnie aérienne exploite un avion ayant une capacité de 200 places. Pour ce vol, une analyse a montré que chaque passager a une probabilité  $p = 0,8$  de se présenter à l'embarquement. On suppose que les présences individuelles des passagers à l'embarquement sont indépendantes. La compagnie souhaite vendre davantage de billets que de places disponibles tout en limitant le risque de voir trop de personnes se présenter à l'embarquement.

Soit  $n$  un entier strictement supérieur à 200, correspondant au nombre de billets vendus. On note  $S_n$  le nombre de personnes se présentant à l'embarquement.

1. Quelle est la loi de  $S_n$  ? Que valent son espérance et sa variance ?
2. On suppose que  $n < 250$ .
  - (a) Justifier que si  $S_n \geq 200$ , alors  $|S_n - 0,8n| \geq 200 - 0,8n$ .
  - (b) En déduire que  $\mathbb{P}(S_n \geq 200) \leq \frac{0,16n}{(200 - 0,8n)^2}$ .
  - (c) Combien de billets la compagnie peut-elle vendre tout en ayant une probabilité inférieure à 5% que plus de 200 clients se présentent à l'embarquement ?

### ► Exercice 25 – Voir le corrigé

Un joueur joue à la roulette en misant à chaque fois un euro sur une couleur (rouge ou noir). A chaque partie, il récupère sa mise et gagne un euro avec probabilité  $\frac{18}{37}$ . Sinon, il perd sa mise. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $X_n$  son gain après  $n$  parties et  $Y_n$  le nombre de parties gagnés parmi les  $n$  premières parties.

1. Quelle est la loi de  $Y_n$  ? Que vaut son espérance et sa variance ?
2. Exprimer  $X_n$  en fonction de  $Y_n$  puis donner son espérance et sa variance.
3. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un entier  $n$  à partir duquel la probabilité que le joueur ait perdu de l'argent après  $n$  parties soit supérieure ou égale à 0,95.

## Exercices de synthèse

### ► Exercice 26 (Sujet zéro 2024) – Voir le corrigé

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

#### Partie I

Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.

On considère que :

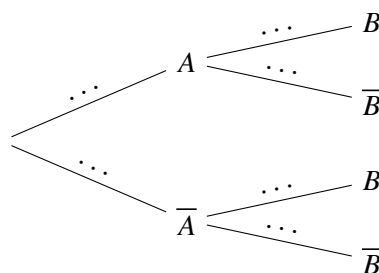
- Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1.
- Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2 ; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.

On prend un candidat au hasard et on note :

- $A$  l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q1 » ;
- $B$  l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q2 ».

On note  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  les évènements contraires de  $A$  et de  $B$ .

1. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2.
3. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2.

On note :

- $X_1$  la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1 ;
- $X_2$  la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q2 ;
- $X$  la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire  $X = X_1 + X_2$ .

4. Déterminer l'espérance de  $X_1$  et de  $X_2$ . En déduire l'espérance de  $X$ .  
Donner une interprétation de l'espérance de  $X$  dans le contexte de l'exercice.
5. On souhaite déterminer la variance de  $X$ .
  - (a) Déterminer  $\mathbb{P}(X = 0)$  et  $\mathbb{P}(X = 2)$ . En déduire  $\mathbb{P}(X = 1)$ .
  - (b) Montrer que la variance de  $X$  vaut 0,57.
  - (c) A-t-on  $V(X) = V(X_1) + V(X_2)$ ? Est-ce surprenant?

## Partie II

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point.

Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité  $\frac{3}{4}$  de répondre correctement, indépendamment des autres questions.

On note  $Y$  la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que  $Y$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Donner la valeur exacte de  $\mathbb{P}(Y = 8)$ .
3. Donner l'espérance et la variance de  $Y$ .

## Partie III

On suppose que les deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen :  $Z = X + Y$ .

1. Calculer l'espérance et la variance de  $Z$ .
2. Soit  $n$  un nombre entier strictement positif.

Pour  $i$  entier variant de 1 à  $n$ , on note  $Z_i$  la variable aléatoire qui, à un échantillon de  $n$  élèves, associe la note de l'élève numéro  $i$  à l'examen.

On admet que les variables aléatoires  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  sont identiques à  $Z$  et indépendantes.

On note  $M_n$  la variable aléatoire qui, à un échantillon de  $n$  élèves, associe la moyenne de leurs  $n$  notes, c'est-à-dire :  $M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}$ .

- (a) Quelle est l'espérance de  $M_n$  ?
- (b) Quelles sont les valeurs de  $n$  telles que l'écart type de  $M_n$  soit inférieur ou égal à 0,5 ?
- (c) Pour les valeurs trouvées en **b.**, montrer que la probabilité que  $6,3 < M_n < 8,3$  est supérieure ou égale à 0,75 .

### ► Exercice 27 (Métropole 2024, Jour 1) – Voir le corrigé

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.

Les achats sur internet représentent 60% des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30% des ventes et ceux en grandes surfaces 10% des ventes.

Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

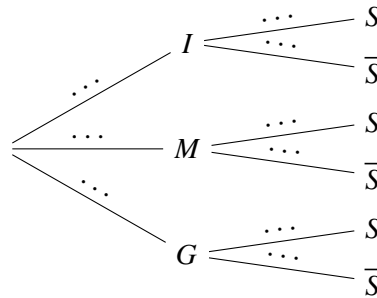
- 75% pour les clients sur internet ;
- 90% pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80% pour les clients en grande surface.

On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné. On définit les évènements suivants.

- $I$  : « le client a effectué son achat sur internet » ;
- $M$  : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
- $G$  : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
- $S$  : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si  $A$  est un évènement quelconque, on notera  $\bar{A}$  son évènement contraire et  $P(A)$  sa probabilité.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.
3. Démontrer que  $P(S) = 0,8$ .
4. Un client est satisfait du service clientèle.  
Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ? On donnera un résultat arrondi à  $10^{-3}$  près.
5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.
  - (a) Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
  - (b) Déterminer la probabilité, arrondie à  $10^{-3}$  près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.
6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.
7. Dans les deux questions **a.** et **b.** qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet.

Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire  $T$  égale à la somme de deux variables aléatoires  $T_1$  et  $T_2$ .

La variable aléatoire  $T_1$  modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution. La variable aléatoire  $T_2$  modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

On admet que les variables aléatoires  $T_1$  et  $T_2$  sont indépendantes, et on donne :

- L'espérance  $E(T_1) = 4$  et la variance  $V(T_1) = 2$  ;
- L'espérance  $E(T_2) = 3$  et la variance  $V(T_2) = 1$ .

- (a) Déterminer l'espérance  $E(T)$  et la variance  $V(T)$  de la variable aléatoire  $T$ .
- (b) Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à  $\frac{2}{3}$ .

## 2. Corrigés

### ► Correction 1 – Voir l'énoncé

La probabilité manquante est  $\frac{3}{10}$ . On a alors les tableaux suivants pour les lois de  $Y$  et  $Z$ .

$k$	-1	1	4	6
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

$k$	-5	-1	5	9
$\mathbb{P}(Z = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

### ► Correction 2 – Voir l'énoncé

$X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,115. Par ailleurs, on a  $Y = 65 - 399X$ .

### ► Correction 3 – Voir l'énoncé

Les présences des passagers étant indépendantes,  $X$  suit une loi binomiale de paramètres 206 et 0,95.

D'après la calculatrice,  $\mathbb{P}(X \leq 200) \approx 0,948$ . Il y a donc environ 5,2% de chances que trop de passagers se présentent à l'embarquement.

On a  $\mathbb{P}(Y = 6) = 1 - (\mathbb{P}(Y = 0) + \dots + \mathbb{P}(Y = 5)) = 0,00003$ .

En vendant 206 billets, la compagnie encaisse  $206 \times 250 = 51500$  euros. Seulement, elle doit rembourser 850 euros par client ne pouvant embarquer (représenté par la variable  $Y$ ). Ainsi,  $C = 51500 - 850Y$ .

$k$	51500	50650	49800	48950	48100	47250	46400
$\mathbb{P}(C = k)$	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	

On a alors  $E[C] \approx 51429$ . Si la compagnie avait vendu seulement 200 billets, son chiffre d'affaires aurait été de 50000 euros, le surbooking lui est donc avantageux.

### ► Correction 4 – Voir l'énoncé

On complète les tableaux donnant les lois de  $X$  et  $Y$  en faisant en sorte que la somme des probabilités vaille 1.

$k$	1	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$

 et 

$k$	1	2	3
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$

Le tableau résumant la loi de la variable aléatoire  $Z = 2X$  est le suivant.

$k$	2	6	8
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$

L'événement  $X+Y = 5$  est réalisé lorsque  $(X = 3 \cap Y = 2)$  ou  $(X = 4 \cap Y = 1)$ . Ces variables étant indépendantes, on a donc

$$\mathbb{P}(X+Y = 5) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{5}{12} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{30}.$$

Le tableau résumant la loi de la variable aléatoire  $W = X + Y$  est le suivant.

$k$	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(W = k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{4}$

Le tableau résumant la loi de la variable aléatoire  $A = 3X - 2Y$  est le suivant.

$k$	-3	-1	1	3	5	6	7	8	10
$\mathbb{P}(A = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

### ► Correction 5 – Voir l'énoncé

La loi de  $X + Y$  est la suivante.

$k$	3	4	6	7	8
$\mathbb{P}(X + Y = k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

Le cas le plus compliqué ici est  $X + Y = 7$  puisqu'il y a deux cas à étudier.

$$\mathbb{P}(X + Y = 7) = \mathbb{P}(X = 2 \cap Y = 5) + \mathbb{P}(X = 3 \cap Y = 4).$$

$X$  et  $Y$  étant indépendantes, on a alors

$$\mathbb{P}(X + Y = 7) = \mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(Y = 5) + \mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}(Y = 4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}.$$

La loi de  $2X + 3Y$  est la suivante.

$k$	7	9	16	18	19	21
$\mathbb{P}(X + Y = k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

### ► Correction 6 – Voir l'énoncé

$$\text{On a } E[X] = 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \text{ et } E[Y] = 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Ainsi, } E[3X + 2] = 3E[X] + 2 = 10, E[X + Y] = E[X] + E[Y] = \frac{8}{3} + \frac{7}{2} = \frac{37}{6} \text{ et}$$

$$E[5X - 2Y] = 5E[X] - 2E[Y] = \frac{40}{3} - 7 = \frac{19}{3}.$$

► **Correction 7 – Voir l'énoncé**

On a  $E(Z_1) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 3 + 3 \times (-5) = -9$ . De plus, les variables  $X$  et  $Y$  étant indépendantes,  $V(Z_1) = V(2X) + V(3Y) = 4V(X) + 9V(Y) = 4 \times 1 + 9 \times 2 = 22$ .

On a  $E(Z_2) = 4E(X) - 2E(Y) = 4 \times 3 - 2 \times (-5) = 22$ . De plus, les variables  $X$  et  $Y$  étant indépendantes,  $V(Z_2) = V(4X) + V(-2Y) = 16V(X) + 4V(Y) = 16 \times 1 + 4 \times 2 = 24$ .

On a  $E(Z_3) = 3E(Y) - 2E(X) + 7 = 3 \times (-5) - 2 \times 3 + 7 = -14$ . De plus, les variables  $X$  et  $Y$  étant indépendantes, et 7 étant un réel,  $V(Z_3) = V(3Y) + V(-2X) + V(7) = 9V(Y) + 4V(X) + 0 = 9 \times 2 + 4 \times 1 = 22$ .

► **Correction 8 – Voir l'énoncé**

On a  $E[Y] = \frac{E[X] - E[X]}{\sigma(X)} = 0$  et  $V(Y) = \frac{V(X) + 0}{\sigma(X)^2} = \frac{V(X)}{V(X)} = 1$ .  $Y$  est centrée et réduite.

► **Correction 9 – Voir l'énoncé**

- Le nombre de tirages est de  $8 \times 8 \times 8 = 512$ .
- (a) Le nombre de tirages sans répétition est de  $8 \times 7 \times 6 = 336$ .  
(b) Le nombre de tirages avec au moins une répétition est donc  $512 - 336 = 176$ .
- $X_1$  prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8, chacune avec probabilité  $\frac{1}{8}$ .
- On a  $E(X_1) = \frac{1}{8} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = \frac{9}{2}$ .
- On a  $E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$ .
- On a  $S = 24$  si et seulement si le numéro 8 a été tiré lors des trois tirages. Ainsi,  $\mathbb{P}(S = 24) = \mathbb{P}((8; 8; 8)) = \frac{1}{512}$ .
- (a) Les 10 tirages possibles sont (8; 8; 8), (8; 8; 7), (8; 7; 8), (7; 8; 8), (8; 7; 7), (7; 8; 7), (7; 7; 8), (8; 8; 6), (8; 6; 8) et (6; 8; 8).  
(b) La probabilité de gagner un lot est donc de  $\frac{10}{512}$  soit  $\frac{5}{256}$ .

► **Correction 10 – Voir l'énoncé**

$X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 3$  et  $p = 0,5$ . Le tableau résumant la loi de  $X$  est le suivant :

$k$	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$Y$  est une variable aléatoire de Bernoulli, de paramètre  $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ . L'espérance de  $Y$  vaut  $\frac{1}{4}$ .

On a alors  $Z = 7Y - 2$  : Si  $Y$  vaut 0, on perd deux euros. Sinon, on en remporte 5.

Ainsi,  $E(Z) = 7E(Y) - 2 = \frac{7}{4} - 2 = -\frac{1}{4}$ . L'espérance est négative, ce jeu est donc au désavantage du joueur.

► **Correction 11 – Voir l'énoncé**

On note  $X$  le nombre de jetons gagnants tirés.  $X$  suit une loi binomiale de paramètres 2 et  $\frac{1}{10}$ . L'espérance de

$X$  vaut  $2 \times \frac{1}{10} = 0,2$

On note  $Y$  le gain algébrique d'un joueur. Si  $X$  représente le nombre de jetons gagnants tirés, le gain est de  $20X$ . La participation au jeu étant de 10 euros, le gain  $Y$  vaut  $Y = 20X - 10$ .

On a donc  $E(X) = 20E(X) - 10 = 20 \times 0,2 - 10 = -6$ . Le jeu est au désavantage du joueur.

► **Correction 12 – Voir l'énoncé**

On a  $E[X] = 2 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{4} + (-1) \times \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}$  et

$$V(X) = \frac{1}{2} \left( 2 - \left( -\frac{1}{8} \right) \right)^2 + \frac{1}{4} \left( 1 - \left( -\frac{1}{8} \right) \right)^2 + \frac{5}{8} \left( -1 - \left( -\frac{1}{8} \right) \right)^2 = \frac{1563}{512} \approx 3,05$$

Par ailleurs,  $E[Y] = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} + (-2) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$  et

$$V(Y) = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( 2 - \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( -2 - \frac{1}{6} \right)^2 = \frac{89}{36} \approx 2,47$$

La variable  $X$  correspond au jeu proposé ici. L'espérance est négative : le jeu est désavantageux pour le joueur. Pour la loi de  $Y$  : Dans une urne sont placées six boules. Une participation coûte deux euros. Deux boules sont perdantes, 3 rapportent 3 euros et 1 rapporte 4 euros.

On a  $Z = 2X + 3Y$  et donc  $E(Z) = 2E(X) + 3E(Y) = -2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4} > 0$ . Le jeu est avantageux pour le joueur.

► **Correction 13 – Voir l'énoncé**

D'une part,  $V(X) = (1-p)E(X)$ . Ainsi,  $p = \frac{1}{3}$ . Par ailleurs,  $E(X) = np = 6$  d'où  $n = 18$ .

► **Correction 14 – Voir l'énoncé**

On a  $E(X) = 10 \times 0,3 = 3$ ,  $V(X) = 10 \times 0,3 \times (1 - 0,3) = 2,1$  et  $\sigma(X) = \sqrt{2,1} \approx 1,449$  puis  $E(Y) = 8 \times 0,2 = 1,6$ ,  $V(Y) = 8 \times 0,2 \times (1 - 0,2) = 1,28$  et  $\sigma(Y) = \sqrt{1,28} \approx 1,131$ .

Par ailleurs,  $E(Z) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 3 - 3 \times 1,6 = 1,2$ . De plus,  $X$  et  $Y$  étant indépendantes, on a  $V(Z) = V(2X) + V(-3Y) = 4V(X) + 9V(Y) = 19,92$  et  $\sigma(Z) = \sqrt{19,92} \approx 4,463$ .

► **Correction 15 – Voir l'énoncé****Partie A : Étude de cas particuliers**

1. (a) La loi de  $X$  est la suivante.

$k$	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

La probabilité d'avoir un tiroir vide correspond au cas où les deux objets sont rangés dans le tiroir 1 (probabilité  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ) ou dans le tiroir 2 (même probabilité), soit une probabilité total de  $\frac{1}{2}$ . La probabilité qu'il y ait un tiroir vide s'obtient par complément à 1.

- (b)  $E[X] = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ .
2. (a) On peut effectuer  $3 \times 3 \times 3 = 27$  rangements différents.
- (b) Si le tiroir 1 n'est pas utilisé, on peut effectuer  $2 \times 2 \times 2 = 8$  rangements différents.
- (c)  $X_1$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{8}{27}$ .
- (d) On considère la variable aléatoire  $X = X_1 + X_2 + X_3$ .  $X$  donne le nombre de tiroirs vides à l'issue de l'expérience.  $E[X] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] = 3 \times \frac{8}{27} = \frac{8}{9}$ . Si l'on fait un grand nombre de fois cette expérience, la moyenne de tiroirs vide se rapprochera de  $\frac{8}{9}$ .

**Partie B : Cas général**

1. Il y a  $n^n$  rangements dans les tiroirs possibles et  $(n-1)^n$  rangements dans les tiroirs qui laissent le tiroir 1 vide. Ainsi,  $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{(n-1)^n}{n^n}$ . Puisque  $Y_1$  est une variable de Bernoulli, c'est également son espérance.
2. Le nombre moyen de tiroirs vides est l'espérance de  $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ . Les  $Y_k$  ont tous pour espérance  $\frac{(n-1)^n}{n^n}$ . Ainsi,  $E(X) = n \times \frac{(n-1)^n}{n^n} = \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}}$ .

► **Correction 16 – Voir l'énoncé**

L'espérance de  $M_n$  vaut 4 et sa variance  $\frac{2}{n}$ . La variance de  $M_n$  est inférieure à  $10^{-4}$  dès que  $n \geq 2 \times 10^4$ .

► **Correction 17 – Voir l'énoncé**

On a  $|X - 4| \geq 2$  si et seulement si  $X \in ]2; 6[$ .

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,  $\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq 2) \leq \frac{V(X)}{2^2} = \frac{1}{4}$ .

Ainsi,  $\mathbb{P}(X \in ]2; 6[) \geq \frac{3}{4}$ .

► **Correction 18 – Voir l'énoncé**

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a  $\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq 2\sigma(X)) \geq \frac{V(X)}{(2\sigma(X))^2}$ . Or,  $(2\sigma(X))^2 = 4\sigma(X)^2 = 4V(X)$ .

Ainsi,  $\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq 2\sigma(X)) \leq \frac{1}{4}$  et donc  $\mathbb{P}(|X - E(X)| < 2\sigma(X)) = 1 - \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq 2\sigma(X)) \geq \frac{3}{4}$ .

De même, on montre que  $\mathbb{P}(|X - E(X)| < 3\sigma(X)) \geq \frac{8}{9}$ .

► **Correction 19 – Voir l'énoncé**

Notons  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de véhicules en circulation lors d'une journée prise au hasard. D'après l'énoncé, on a donc  $E(X) = 24000$  et  $V(X) = 6000$ . D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, la probabilité que l'écart entre le nombre de véhicules en circulation lors d'une journée prise au hasard et la moyenne de véhicules recensés soit supérieure ou égal à 1000 peut être majorée comme suit :

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq 1000) \leq \frac{V(X)}{1000^2} = 0,006.$$

De la même manière,

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq 100) \leq \frac{V(X)}{100^2} = 0,6.$$

► **Correction 20 – Voir l'énoncé**

On a  $S = T_1 + T_2 + T_3$ . Ainsi,  $E(S) = E(T_1 + T_2 + T_3) = E(T_1) + E(T_2) + E(T_3) = 18$ . En moyenne, un automobiliste qui a deux personnes devant lui dans la file d'attente attendra 18 minutes avant de pouvoir repartir.

Par ailleurs, puisque  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sont indépendantes, on a  $V(S) = V(T_1) + V(T_2) + V(T_3) = 3$ .

On cherche alors à minorer la probabilité  $\mathbb{P}(S \in ]14; 22[)$ , c'est-à-dire  $\mathbb{P}(S \in ]18 - 4; 18 + 4[)$ .

La probabilité recherchée est donc  $\mathbb{P}(|S - 18| < 4)$ , c'est-à-dire  $\mathbb{P}(|S - E(S)| < 4)$ .

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel  $\delta$  strictement positif,  $\mathbb{P}(|S - E(S)| \geq \delta) \leq \frac{V(S)}{\delta^2}$ .

En prenant  $\delta = 4$ , on a donc  $\mathbb{P}(|S - E(S)| \geq 4) \leq \frac{3}{16}$ .

Ainsi,  $\mathbb{P}(|S - E(S)| < 4) = 1 - \mathbb{P}(|S - E(S)| \geq 4) \geq 1 - \frac{3}{16}$ . On a donc  $\mathbb{P}(|S - E(S)| < 4) \geq \frac{13}{16}$ .

Or,  $\frac{13}{16} = 0,8125 > 0,81$ . Finalement, la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

► **Correction 22 – Voir l'énoncé**

$X$  suit une loi binomiale de paramètres 3600 et  $\frac{1}{6}$ .

Ainsi,  $E[X] = 3600 \times \frac{1}{6} = 600$  et  $V(X) = 3600 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 500$ .

Par ailleurs,  $X \in ]480; 720[$  correspond à  $X - 600 \in ] -120; 120[$  c'est-à-dire  $|X - 600| < 120$ .

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,  $\mathbb{P}(|X - E[X]| \geq 120) \leq \frac{500}{120^2} = 0,035$ .

Ainsi,  $\mathbb{P}(|X - E[X]| < 120) \geq 1 - 0,035 = 0,965$ .

► **Correction 23 – Voir l'énoncé**

L'inégalité de concentration pour  $M_n$  s'écrit  $\mathbb{P}(|M_n - E(X_1)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2} = \frac{2}{n\delta^2}$ .

En prenant  $\delta = 0,05$ , on obtient  $\mathbb{P}(|M_n - 5| \geq 0,05) \leq \frac{2}{0,0025n}$ , qui est inférieur à 0,01 lorsque  $n \geq 80000$ .

► **Correction 24 – Voir l'énoncé**

$S_n$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et 0,8. Ainsi,  $E[S_n] = 0,8n$  et  $V(S_n) = 0,16n$ .

Si  $S_n \geq 200$ , alors  $S_n - 0,8n \geq 200 - 0,8n$ . Puisque  $n < 250$ , alors  $200 - 0,8n > 0$  et donc, par croissance de la fonction valeur absolue sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $|S_n - 0,8n| \geq 200 - 0,8n$ .

Ainsi,  $\mathbb{P}(S_n \geq 200) \leq \mathbb{P}(|S_n - 0,8n| \geq 200 - 0,8n)$ . Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,  $\mathbb{P}(|S_n - 0,8n| \geq 200 - 0,8n) \leq \frac{0,16n}{(200 - 0,8n)^2}$ , d'où le résultat voulu.

On a  $\frac{0,16n}{(200 - 0,8n)^2} \leq 0,05$  si et seulement si  $0,032n^2 - 16,16n + 2000 \geq 0$ . Il s'agit d'un polynôme du second degré dont les racines valent environ 217,06 et 287,94. En particulier, si  $n < 250$ , cette quantité est positive pour  $n \leq 217$ . La compagnie peut vendre 217 billets : elle aura alors moins de 5% de chance que plus de 200 clients se présentent à l'embarquement.

► **Correction 25 – Voir l'énoncé**

$Y_n$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\frac{18}{37}$ . Son espérance vaut  $\frac{18n}{37}$  et sa variance  $\frac{306n}{1369}$ .

On a par ailleurs  $X_n = Y_n \times 1 + (n - Y_n) \times (-1) = 2Y_n - n$ .

Ainsi,  $E[X_n] = 2E[Y_n] - n = -\frac{n}{37}$  et  $V(X_n) = 4V(Y_n) = \frac{1224n}{1369}$ .

On cherche alors  $P(X_n < 0)$ . Or, si  $X_n \geq 0$ , alors  $X_n + \frac{n}{37} \geq \frac{n}{37}$  et donc  $\left|X_n + \frac{n}{37}\right| \geq \frac{n}{37}$ .

Ainsi,  $P(X_n \geq 0) \leq \mathbb{P}\left(\left|X_n + \frac{n}{37}\right| \geq \frac{n}{37}\right)$ .

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,  $\mathbb{P}\left(\left|X_n + \frac{n}{37}\right| \geq \frac{n}{37}\right) \leq \frac{\frac{1224n}{1369}}{\frac{n^2}{37^2}} = \frac{1224}{n}$ .

Ainsi, en utilisant le complémentaire,  $P(X_n < 0) \geq 1 - \frac{1224}{n}$ . Or,  $1 - \frac{1224}{n} \geq 0,95$  si et seulement si

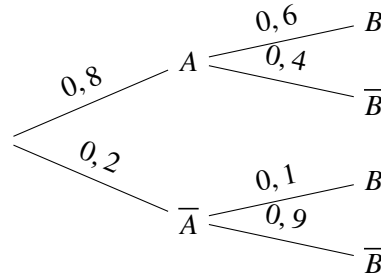
$$n \geq \frac{1224}{0,05} = 22480.$$

Un joueur qui fait 22480 parties a plus de 95% de chances de perdre de l'argent à l'issue de ces parties.

### ► Correction 26 – Voir l'énoncé

#### Partie I

- On complète l'arbre de probabilités modélisant la situation



- On a  $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$ .
- $(A; \bar{A})$  est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = 0,6 \times 0,8 + 0,2 \times 0,1 = 0,5.$$

- $X_1$  prend les valeurs 0 et 1, elle suit donc une loi de Bernoulli. Son paramètre (et donc son espérance) vaut 0,8.  
De même,  $X_2$  suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,5. On a donc  $E(X_2) = 0,5$ .  
Ainsi,  $E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 0,8 + 0,5 = 1,3$ . En moyenne, un élève obtient une note de 1,3 au premier exercice.
- On a  $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$  et  $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(A \cap B) = 0,48$ .  
Ainsi,  $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - (0,18 + 0,48) = 0,34$ .
- On a  $E(X^2) = 0^2 \times 0,18 + 1^2 \times 0,34 + 2^2 \times 0,48 = 2,26$ .  
D'après la formule de Koenig-Huygens,  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2,26 - 1,3^2 = 0,57$ .
- On a  $V(X_1) = 0,8 \times (1 - 0,8) = 0,16$  et  $V(X_2) = 0,5 \times (1 - 0,5) = 0,25$ .  
Ainsi,  $V(X_1) + V(X_2) = 0,41 \neq V(X)$ .  
Ce résultat n'est pas surprenant puisque les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas indépendantes.

#### Partie II

- $Y$  compte le nombre de succès (la réponse donnée est exacte) d'une répétitions de 8 épreuves identiques et indépendantes. La probabilité de succès est de  $\frac{3}{4}$ . Ainsi,  $Y$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}\left(8; \frac{3}{4}\right)$ .
- On a  $\mathbb{P}(Y = 8) = \binom{8}{8} \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{8-8} = \left(\frac{3}{4}\right)^8$ .
- On a  $E(Y) = 8 \times \frac{3}{4} = 6$  et  $V(Y) = 8 \times \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ .

#### Partie III

- On a  $E[Z] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 1,3 + 6 = 7,3$ .  
De plus, puisque  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, on a  $V(Z) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 0,57 + 1,5 = 2,07$ .
- (a) On a  $E[M_n] = E[Z_1] = 7,3$ .

(b) On a  $V(M_n) = \frac{V(Z_1)}{n} = \frac{2,07}{n}$  et donc  $\sigma(M_n) = \sqrt{\frac{2,07}{n}}$ .

Ainsi,  $\sigma(M_n) \leq 0,5 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2,07}{n}} \leq 0,5 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2,07}}{0,5} \leq \sqrt{n}$ . Par croissance de la fonction  $x \mapsto x^2$  sur  $[0; +\infty[$ , on a alors  $n \geq \frac{2,07}{0,25}$ . Or,  $\frac{2,07}{0,25} = 8,28$ . L'entier recherché est donc  $n = 9$ .

(c) On a  $6,3 < M_n < 8,3$  si et seulement si  $M_n \in ]6,3; 8,3[$  soit  $M_n \in ]7,3 - 1; 7,3 + 1[$  c'est-à-dire  $|M_n - 7,3| < 1$ .

Or,  $E(M_n) = 7,3$ . D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a  $\mathbb{P}(|M_n - 7,3| \geq 1) \leq \frac{V(M_n)}{1^2}$

et donc  $\mathbb{P}(|M_n - 7,3| \geq 1) \leq \frac{2,07}{n}$ .

Ainsi,  $\mathbb{P}(|M_n - 7,3| < 1) = 1 - \mathbb{P}(|M_n - 7,3| \geq 1) \geq 1 - \frac{2,07}{n}$ .

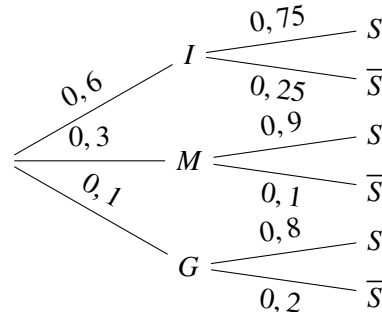
D'après la question précédente, on a  $n \geq 9$ .

Ainsi,  $\frac{2,07}{n} \leq \frac{2,07}{9}$  et  $1 - \frac{2,07}{n} \geq 1 - \frac{2,07}{9}$ . Or,  $1 - \frac{2,07}{9} = 0,77$ .

Ainsi, on a bien  $\mathbb{P}(|M_n - 7,3| < 1) \geq 0,77 \geq 0,75$ .

► Correction 27 – Voir l'énoncé

1. On complète l'arbre comme suit.



2. On a  $P(I \cap S) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$ .

3.  $(I; M; G)$  forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(S) = P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S) = 0,45 + 0,3 \times 0,9 + 0,1 \times 0,8 = 0,8.$$

4. On a  $P_S(I) = \frac{P(S \cap I)}{P(S)} = \frac{0,45}{0,8} \simeq 0,563$ .

5. (a) Puisque les tirages sont assimilés à des tirages avec remise,  $X$  compte le nombre de succès (le client est satisfait) d'une répétition de 30 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.  $X$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(30; 0,8)$ .

(b) D'après la calculatrice, on a  $P(X \geq 25) \simeq 0,428$ .

6. Notons  $Y$  le nombre de clients non satisfaits lorsque l'on interroge  $n$  clients.

$Y$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n; 0,2)$ .

On a alors  $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0)$  puisque  $Y$  est à valeurs entières.

$$\text{Or, } P(Y = 0) = \binom{n}{0} \times 0,2^0 \times (1 - 0,2)^n = 0,8^n.$$

$$\text{Ainsi, } P(Y \geq 1) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - 0,8^n \geq 0,8^n \Leftrightarrow -0,8^n \geq -0,01 \Leftrightarrow 0,8^n \leq 0,01.$$

Par croissance du logarithme népérien sur  $]0; +\infty[$ , on a alors  $\ln(0,8^n) \leq \ln(0,01)$  soit  $n \ln(0,8) \leq$

$$\ln(0,01) \text{ et donc } n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)}. \text{ Or, } \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \simeq 20,6. \text{ L'entier recherché est donc 21.}$$

7. (a) On a  $E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$ .

De plus, puisque  $T_1$  et  $T_2$  sont indépendantes,  $V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3$ .

(b) On cherche  $P(5 \leq T \leq 9)$ .

Puisque  $T$  est à valeurs entières, cette probabilité est égale à  $P(4 < T < 10)$ . Or, on a  $4 < T < 10$  si et seulement si  $7 - 3 < T < 7 + 3$  c'est-à-dire  $|T - 7| < 3$  et donc  $|T - E(T)| < 3$ .

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a  $P(|T - E(T)| \geq 3) \leq \frac{V(T)}{3^2}$ .

On obtient donc  $P(|T - E(T)| \geq 3) \leq \frac{1}{3}$ .

Ainsi,  $P(|T - E(T)| < 3) = 1 - P(|T - E(T)| \geq 3) \geq 1 - \frac{1}{3}$  et finalement,  $P(|T - E(T)| < 3) \geq \frac{2}{3}$ .