1. Amérique du Nord, 20 mai 2026

Exercice 1

Partie A

1. L'énoncé précise que 25 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Étudiant » et 15 % l'abonnement « Famille ». Nous avons donc :

$$P(E) = 0{,}25 \quad \text{et} \quad P(F) = 0{,}15$$

La plateforme ne proposant que trois types d'abonnements, les évènements E, C et F forment une partition de l'univers. Par conséquent, la probabilité de choisir l'abonnement « Classique » est :

$$P(C) = 1 - P(E) - P(F) = 1 - 0{,}25 - 0{,}15 = 0{,}60$$

Il nous manque à présent les probabilités conditionnelles relatives à l'activation de l'option « Écoute hors-ligne » (évènement H) :

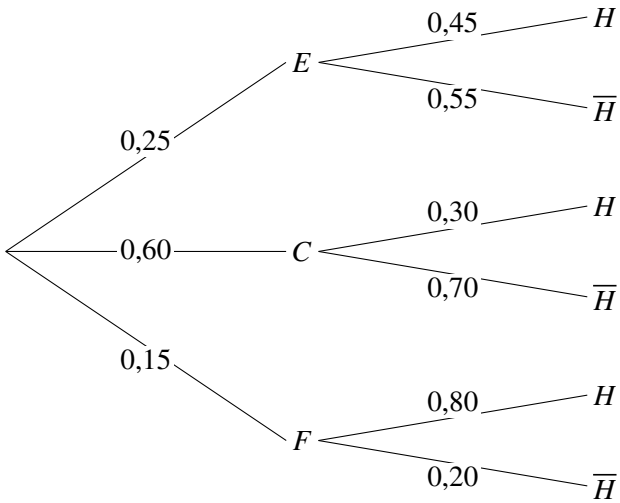
— 45 % des abonnés « Étudiant » ont activé l'option, d'où $P_E(H) = 0{,}45$ et $P_E(\overline{H}) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$.

— 30 % des abonnés « Classique » ont activé l'option, d'où $P_C(H) = 0{,}30$ et $P_C(\overline{H}) = 1 - 0{,}30 = 0{,}70$.

— L'énoncé indique que 12 % de l'ensemble des abonnés ont choisi l'abonnement « Famille » et activé l'option, ce qui correspond à la probabilité de l'intersection : $P(F \cap H) = 0{,}12$.
On en déduit que :

$$P_F(H) = \frac{P(F \cap H)}{P(F)} = \frac{0{,}12}{0{,}15} = 0{,}80$$

On a alors $P_F(\overline{H}) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$.



2. On a

$$P(E \cap H) = P(E) \times P_E(H) = 0{,}25 \times 0{,}45 = 0{,}112\,5$$

La valeur exacte de $P(E \cap H)$ est donc 0,112 5.

3. Les évènements E, C et F forment une partition de l'univers. D'aprèsla formule des probabilités totales, on a :

$$P(H) = P(E \cap H) + P(C \cap H) + P(F \cap H)$$

Or,

$$P(C \cap H) = P(C) \times P_C(H) = 0{,}60 \times 0{,}30 = 0{,}180\,0$$

Puisque par ailleurs, $P(F \cap H) = 0{,}12$, on a finalement :

$$P(H) = 0{,}112\,5 + 0{,}180\,0 + 0{,}120\,0 = 0{,}412\,5$$

La probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est par conséquent égale à 0,412 5.

4. On cherche la probabilité que l'abonné ait choisi la formule « Étudiant » sachant qu'il dispose de l'option « Écoute hors-ligne ». Par définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$P_H(E) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{0{,}112\,5}{0{,}412\,5} = \frac{1125}{4125} = \frac{3}{11} \approx 0{,}273$$

Arrondie au millième, la probabilité demandée est de 0,273.

Partie B

1. L'expérience consiste en la répétition de 8 tirages indépendants et identiques, chaque tirage consistant à prélever un abonné dont le profil possède deux issues possibles : le succès (l'abonné a activé l'option H) de probabilité $p = 0{,}412\,5$, ou l'échec (l'abonné n'a pas activé l'option $\overline{H}$) de probabilité $1 - p = 0{,}587\,5$.
La variable aléatoire X compte le nombre total de succès à l'issue de ces 8 épreuves de Bernoulli, X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0{,}412\,5$.
Remarque : Il ne faut pas omettre de citer explicitement les trois arguments justifiant la loi binomiale : la répétition d'épreuves de Bernoulli, l'identité de ces épreuves (probabilité constante) et surtout l'indépendance des tirages, ici garantie par l'assimilation à un tirage avec remise.

2. On a

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} \times 0{,}412\,5^0 \times (0{,}587\,5)^8 = 1 \times 1 \times 0{,}587\,5^8 \approx 0{,}014$$

La probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option est d'environ 0,014 au millième près.

3. (a) L'évènement dont on cherche la probabilité, noté q_n, est « au moins un abonné de cet échantillon a activé l'option ». L'évènement contraire est « aucun des n abonnés n'a activé l'option ».
Les choix étant mutuellement indépendants, la probabilité qu'aucun abonné n'ait activé l'option au cours des n tirages est égale à $(0{,}587\,5)^n$. Par passage au complémentaire, on a bien pour tout entier naturel n non nul :

$$q_n = 1 - 0{,}587\,5^n$$

(b) On cherche le plus petit entier naturel n non nul tel que $q_n \geqslant 0{,}999$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} 1 - 0{,}587\,5^n \geqslant 0{,}999 &\iff -0{,}587\,5^n \geqslant -0{,}001 \\ &\iff 0{,}587\,5^n \leqslant 0{,}001 \end{aligned}$$

La fonction logarithme népérien étant croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, elle préserve le sens de l'inégalité. Ainsi,

$$1-0{,}587\,5^n \geqslant 0{,}999 \iff \ln\left(0{,}587\,5^n\right) \leqslant \ln(0{,}001) \iff n\ln(0{,}587\,5) \leqslant \ln(0{,}001)$$

Le nombre 0,587 5 étant strictement compris entre 0 et 1, son logarithme $\ln(0{,}587\,5)$ est strictement négatif. Diviser par un nombre négatif implique de renverser le sens de l'inéquation :

$$1-0{,}587\,5^n \geqslant 0{,}999 \iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}587\,5)}$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient la valeur approchée suivante :

$$\frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}587\,5)} \approx 12{,}986$$

Le plus petit entier naturel satisfaisant cette condition est donc $n = 13$.

Partie C

1. Chaque abonné se trouve dans l'une des six situations exclusives déterminées par son type d'abonnement et la présence ou l'absence de l'option. Calculons le coût mensuel pour chacune d'elles :
   - Abonnement Étudiant sans option : 5 €; avec option : 5 + 2 = 7 €.
   - Abonnement Classique sans option : 10 €; avec option : 10 + 2 = 12 €.
   - Abonnement Famille sans option : 16 €; avec option : 16 + 2 = 18 €.

   Les six valeurs possibles de Y sont donc : 5, 7, 10, 12, 16 et 18.
2. Associons à chaque valeur sa probabilité correspondante en utilisant les probabilités des intersections lues sur l'arbre de la Partie A :
   - $P(Y=5) = P(E \cap \overline{H}) = 0{,}25 \times 0{,}55 = 0{,}137\,5$
   - $P(Y=7) = P(E \cap H) = 0{,}112\,5$
   - $P(Y=10) = P(C \cap \overline{H}) = 0{,}60 \times 0{,}70 = 0{,}420\,0$
   - $P(Y=12) = P(C \cap H) = 0{,}180\,0$
   - $P(Y=16) = P(F \cap \overline{H}) = 0{,}15 \times 0{,}20 = 0{,}030\,0$
   - $P(Y=18) = P(F \cap H) = 0{,}120\,0$

   La loi de probabilité de Y se résume dans le tableau suivant :

y_i	5	7	10	12	16	18
$P(Y=y_i)$	0,137 5	0,112 5	0,420 0	0,180 0	0,030 0	0,120 0

3. Par définition, l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y est :

$$\begin{aligned} E(Y) &= 5 \times 0{,}137\,5 + 7 \times 0{,}112\,5 + 10 \times 0{,}420\,0 + 12 \times 0{,}180\,0 + 16 \times 0{,}030\,0 + 18 \times 0{,}120\,0 \\ &= 0{,}687\,5 + 0{,}787\,5 + 4{,}200\,0 + 2{,}160\,0 + 0{,}480\,0 + 2{,}160\,0 = 10{,}475 \end{aligned}$$

   L'espérance de Y est donc égale à 10,475. Cela signifie que le prix moyen payé mensuellement par un abonné de cette plateforme s'élève à 10,475 €.
4. À l'aide de la calculatrice, en saisissant les valeurs y_i et leurs probabilités associées, nous obtenons pour la variance de Y, arrondie au centième :

$$V(Y) \approx 13{,}70$$

5. (a) L'écart-type de Z étant égal à 2, la variance est donnée par le carré de l'écart-type :

$$V(Z) = (\sigma(Z))^2 = 2^2 = 4$$

(b) On s'intéresse à la probabilité de l'évènement $(6 < Z < 12)$. Remarquons que cet évènement peut se reformuler en exploitant l'espérance de Z qui vaut 9 :

$$6 < Z < 12 \iff 9 - 3 < Z < 9 + 3 \iff -3 < Z - 9 < 3 \iff |Z - 9| < 3$$

L'évènement contraire est $|Z - 9| \geqslant 3$. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\varepsilon = 3$, on obtient :

$$P(|Z - 9| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(Z)}{3^2} \text{ donc } P(|Z - 9| \geqslant 3) \leqslant \frac{4}{9}$$

En passant à l'évènement complémentaire, il vient :

$$P(|Z - 9| < 3) = 1 - P(|Z - 9| \geqslant 3) \geqslant 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Comme $\dfrac{5}{9} \approx 0{,}556$, la probabilité que le prix de l'abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros est supérieure ou égale à 0,556, ce qui est bien supérieur à 0,50 (50 %). L'affirmation du responsable est par conséquent parfaitement justifiée.

Exercice 2

Partie A : Étude d'un modèle discret

1. Au 1er janvier 2026, l'indice correspond à $n = 1$. Or,

$$u_1 = 4 - \frac{4}{u_0} = 4 - \frac{4}{4} = 4 - 1 = 3$$

Le modèle discret prévoit un total de 3 milliers de perches-soleil au 1er janvier 2026, c'est-à-dire 3 000 individus.

2. (a) La fonction h est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. Pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$h'(x) = 0 - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2}$$

Pour tout réel $x > 0$, on a $4 > 0$ et $x^2 > 0$, d'où $h'(x) > 0$. On en conclut que la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

(b) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$ » est vraie.
Initialisation : Pour $n = 0$, nous avons $u_0 = 4$ et $u_1 = 3$. L'encadrement donne $2 \leqslant 3 \leqslant 4 \leqslant 4$, ce qui correspond bien à $2 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 4$. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vérifiée.
Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie, à savoir que $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$. La fonction h étant strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, elle préserve l'ordre des inégalités. En l'appliquant à chaque membre de l'encadrement, on obtient :

$$h(2) \leqslant h(u_{n+1}) \leqslant h(u_n) \leqslant h(4)$$

Calculons les valeurs des images des bornes par la fonction h :

$$h(2) = 4 - \frac{4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad h(4) = 4 - \frac{4}{4} = 3$$

Par définition de la suite, $h(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $h(u_n) = u_{n+1}$. L'inéquation devient :

$$2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$$

Comme $3 \leqslant 4$, on a bien :

$$2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
Conclusion : La propriété est initialisée au rang 0 et est héréditaire. Par le principe de récurrence, nous avons montré que pour tout entier naturel n, $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.

(c) D'après l'inégalité précédente, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$, ce qui démontre que la suite (u_n) est décroissante.

(d) De plus, l'encadrement indique également que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$, ce qui signifie que la suite (u_n) est minorée par 2.
La suite (u_n) étant décroissante et minorée, le théorème de la limite monotone assure sa convergence vers une limite réelle notée ℓ.

(e) Le fait que $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n implique par passage à la limite que $\ell \geqslant 2$.
La suite (u_n) est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = h(u_n)$. La fonction h étant continue sur $]0\,;\,+\infty[$, et donc en particulier en ℓ, la limite ℓ doit vérifier l'équation de point fixe $\ell = h(\ell)$:

$$\begin{aligned} \ell = 4 - \frac{4}{\ell} &\iff \ell^2 = 4\ell - 4 \\ &\iff \ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \\ &\iff (\ell - 2)^2 = 0 \text{ donc } \ell = 2 \end{aligned}$$

La limite unique de la suite (u_n) est par conséquent $\ell = 2$.

(f) Ce modèle ne prévoit pas l'élimination de cette espèce envahissante à long terme. En effet, le nombre d'individus converge vers 2 milliers, ce qui signifie que la population va tendre vers un effectif stable de 2 000 perches-soleil.

3. (a) La suite (u_n) décroît vers sa limite 2. Pour un seuil $s \in]2\,;\,4[$, les termes restent supérieurs ou égaux à s pendant un nombre fini d'étapes avant de franchir ce seuil vers le bas. La boucle doit donc continuer tant que $u \geqslant s$. Voici le script Python complété :

```
def population(s) :
    u = 4
    n = 0
    while u >= s :
        u = 4 - 4 / u
        n = n + 1
    return n
```

(b) Déterminons les premières valeurs de la suite (u_n) pour identifier le rang du franchissement du seuil $2,2$:

— $n = 0 : u_0 = 4$

— $n = 1 : u_1 = 3$

— $n = 2 : u_2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2{,}667$

— $n = 3 : u_3 = 4 - \frac{4}{8/3} = 4 - \frac{12}{8} = 2{,}5$

— $n = 4 : u_4 = 4 - \frac{4}{2{,}5} = 2{,}4$

— $n = 5 : u_5 = 4 - \frac{4}{2{,}4} = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3} \approx 2{,}333$

— $n = 6 : u_6 = 4 - \frac{4}{7/3} = \frac{16}{7} \approx 2{,}286$

— $n = 7 : u_7 = 4 - \frac{4}{16/7} = 2{,}25$

— $n = 8 : u_8 = 4 - \frac{4}{2{,}25} = \frac{20}{9} \approx 2{,}222$

— $n = 9 : u_9 = 4 - \frac{4}{20/9} = 2{,}2$

— $n = 10 : u_{10} = 4 - \frac{4}{2{,}2} = \frac{24}{11} \approx 2{,}182$

Au rang $n = 9$, la valeur u_9 est égale à 2, 2. La condition de la boucle `u >= 2.2` étant encore satisfaite, le script exécute une itération supplémentaire. Au rang $n = 10$, $u_{10} \approx 2{,}182$ devient strictement inférieur à 2, 2, ce qui provoque l'arrêt de la boucle. Le script renvoie donc la valeur 10.

Piège de calcul : Il faut être vigilant sur la condition d'arrêt d'un script de recherche de seuil. Puisque $u_9 = 2{,}2$, la condition du `while` reste vraie au rang 9. Le piège classique serait de répondre 9 en oubliant que l'inégalité de la boucle est large.

Dans le contexte de l'exercice, ce résultat signifie qu'au bout de 10 ans, c'est-à-dire au 1er janvier 2025 + 10 = 2035, la population de perches-soleil descendra pour la première fois en dessous de 2,2 milliers (soit sous la barre de 2 200 individus).

Partie B : Étude d'un modèle continu

1. L'équation différentielle s'écrit $(E) : y' + y = 2$, soit $y' = -y + 2$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier degré de la forme $y' = ay + b$ où $a = -1$ et $b = 2$.

2. D'après le cours, les solutions de cette équation sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ sont les fonctions définies par :

$$t \mapsto C\mathrm{e}^{-t} - \frac{2}{-1}$$

ce qui donne les fonctions de la forme $t \mapsto C\mathrm{e}^{-t} + 2$, où C représente une constante réelle arbitraire.

3. La fonction p étant solution de l'équation différentielle (E), il existe une constante réelle C telle que pour tout réel $t \in [0\,;+\infty[$, $p(t) = C\mathrm{e}^{-t} + 2$. Utilisons la condition initiale $p(0) = 4$ afin d'isoler la valeur de C :

$$p(0) = 4 \iff C\mathrm{e}^{0} + 2 = 4 \text{ donc } C + 2 = 4 \text{ donc } C = 2$$

L'expression de la fonction p modélisant l'évolution de la population sur $[0\,;+\infty[$ est par conséquent :

$$p(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + 2$$

4. Calculons la limite de la fonction p lorsque t tend vers $+\infty$. On sait que $\lim_{t\to+\infty} -t = -\infty$. Par composition avec la fonction exponentielle, il vient $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = 2 \times 0 + 2 = 2$$

Sous ce second modèle continu, l'élimination de l'espèce à long terme n'est pas non plus envisagée puisque l'effectif de la population tend à se stabiliser autour de 2 milliers d'individus (soit 2 000 perches-soleil).

Exercice 3

Partie A

1. On a :

$$A(-1\,;\,-1\,;\,0) \quad \text{et} \quad D(1\,;\,-1\,;\,0)$$

2. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{SC}}$ et $\overrightarrow{\text{SB}}$ sachant que $S(0\,;\,0\,;\,2)$, $B(-1\,;\,1\,;\,0)$ et $C(1\,;\,1\,;\,0)$:

$$\overrightarrow{\text{SC}}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{SB}}\begin{pmatrix}-1-0\\1-0\\0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Le repère étant orthonormé, on peut calculer le produit scalaire de ces deux vecteurs à l'aide de la formule usuelle :

$$\overrightarrow{\text{SC}}\cdot\overrightarrow{\text{SB}} = 1\times(-1)+1\times 1+(-2)\times(-2) = -1+1+4 = 4$$

3. Par définition du produit scalaire, on a :

$$\overrightarrow{\text{SC}}\cdot\overrightarrow{\text{SB}} = SC\times SB\times\cos\left(\widehat{\text{BSC}}\right)$$

Calculons les longueurs des segments $[SC]$ et $[SB]$:

$$SC = \sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$SB = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

En réinjectant ces valeurs dans l'expression du produit scalaire, on obtient :

$$4 = \sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\cos\left(\widehat{\text{BSC}}\right) \text{ donc } 4 = 6\cos\left(\widehat{\text{BSC}}\right)$$

Le cosinus de l'angle vaut donc $\cos\left(\widehat{\text{BSC}}\right) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. En appliquant la fonction arc cosinus, la calculatrice fournit l'approximation suivante :

$$\widehat{\text{BSC}} = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48,2°$$

L'angle $\widehat{\text{BSC}}$ mesure environ $48,2°$, arrondi au dixième de degré.

Partie B

1. (a) Pour prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (SBC), il suffit de démontrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan. Utilisons les vecteurs $\overrightarrow{\text{SB}}$ et $\overrightarrow{\text{SC}}$:

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{SB}} = 0\times(-1)+2\times 1+1\times(-2) = 0+2-2 = 0$$

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{SC}} = 0\times 1+2\times 1+1\times(-2) = 0+2-2 = 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{SB}}$ et $\overrightarrow{\text{SC}}$. Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles), le vecteur $\overrightarrow{n}$ est bien normal au plan (SBC).

(b) Le vecteur $\overrightarrow{n}$ étant normal au plan (SBC), une équation cartésienne de ce plan s'écrit sous la forme $0x+2y+1z+d=0$, soit $2y+z+d=0$, où d représente un nombre réel. Le point $C(1\,;\,1\,;\,0)$ appartient au plan (SBC), ses coordonnées vérifient donc l'équation :

$$2\times 1+0+d=0 \text{ donc } 2+d=0 \text{ donc } d=-2$$

Une équation cartésienne du plan (SBC) est ainsi $2y+z-2=0$.

2. (a) La droite (OH) est perpendiculaire au plan (SBC) et passe par le point $O(0\,;\,0\,;\,0)$. Elle admet donc pour vecteur directeur le vecteur normal au plan, $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de cette droite est immédiatement donnée par le système :

$$\begin{cases} x=0+0\times t\\ y=0+2\times t\\ z=0+1\times t\end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x=0\\ y=2t\\ z=t\end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

(b) Le point H étant le projeté orthogonal de O sur le plan (SBC), il est le point d'intersection de la droite (OH) avec ce plan. Ses coordonnées vérifient donc à la fois le système paramétrique de la droite et l'équation cartésienne du plan. Substituons les expressions de y et z dans l'équation du plan :

$$2(2t)+t-2=0 \iff 4t+t=2 \iff 5t=2 \iff t=\frac{2}{5}$$

En remplaçant le paramètre t par $\frac{2}{5}$ dans les équations de la droite, on obtient les coordonnées de H :

$$x_H=0, \quad y_H=2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}, \quad z_H=\frac{2}{5}$$

Le point H a ainsi pour coordonnées $\left(0\,;\,\frac{4}{5}\,;\,\frac{2}{5}\right)$.

(c) La distance du point O au plan (SBC) correspond à la longueur du segment $[OH]$. Calculons cette distance :

$$OH=\sqrt{(x_H-x_O)^2+(y_H-y_O)^2+(z_H-z_O)^2}=\sqrt{0^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

$$OH=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{4}{25}}=\sqrt{\frac{20}{25}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

La distance du point O au plan (SBC) est donc bien égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

Partie C

1. (a) La base $ABCD$ de la pyramide est un carré de côté 2 cm, son aire est donc $\text{Aire}(ABCD)=2\times 2=4$ cm^2. La hauteur correspond à la longueur du segment vertical $[OS]$, soit $OS=2$ cm. Appliquons la formule du volume :

$$V_{SABCD}=\frac{1}{3}\times \text{Aire de la base}\times \text{hauteur}=\frac{1}{3}\times 4\times 2=\frac{8}{3}\text{ cm}^3$$

(b) Les diagonales du carré de base $ABCD$ le découpent en quatre triangles de surfaces identiques : OAB, OBC, OCD et ODA. L'aire du triangle OBC correspond donc au quart de l'aire totale du carré : $\text{Aire}(OBC) = \frac{4}{4} = 1$ cm^2. La pyramide $OCBS$ possède pour base ce triangle OBC et pour hauteur le segment $[OS]$. Son volume vaut :

$$V_{OCBS} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(OBC) \times OS = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 = \frac{2}{3} \text{ cm}^3$$

2. Le triangle SBC est un triangle isocèle en S puisque $SB = SC = \sqrt{6}$. Le point J étant le milieu du segment $[BC]$, la droite (SJ) est la hauteur issue de S dans ce triangle. Déterminons les coordonnées de J, milieu de $[BC]$ avec $B(-1\,;\,1\,;\,0)$ et $C(1\,;\,1\,;\,0)$: nous obtenons $J(0\,;\,1\,;\,0)$.
Le vecteur $\overrightarrow{\text{SJ}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, ce qui nous permet de calculer sa longueur :

$$SJ = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \text{ cm}$$

La base du triangle étant $BC = 2$ cm, l'aire du triangle SBC vaut :

$$\text{Aire}(SBC) = \frac{1}{2} \times BC \times SJ = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5} \text{ cm}^2$$

3. Le volume de la pyramide $OCBS$ peut également être calculé en prenant le triangle SBC comme base. Dans ce cas, la hauteur associée est la distance du point O au plan (SBC) :

$$V_{OCBS} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(SBC) \times d(O\,,(SBC))$$

En égalisant avec la valeur trouvée à la question **1.b**, on obtient :

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \sqrt{5} \times d(O\,,(SBC)) \text{ donc } 2 = \sqrt{5} \times d(O\,,(SBC))$$

Ainsi,

$$d(O\,,(SBC)) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

On retrouve bien le résultat de la Partie B par cette nouvelle aprpoche.

Exercice 4

1. En observant l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$:
   — Sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$, la courbe semble située au-dessus de ses tangentes, ce qui amène à conjecturer que la fonction f y est convexe.
   — Sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, la courbe semble située en dessous de ses tangentes, ce qui amène à conjecturer que la fonction f y est concave.
   — N'ayant pas accès à la courbe pour les valeurs de x inférieures à -1, il est impossible de formuler une conjecture quant à la nature de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1[$.
2. On sait que $\lim_{x\to-\infty}(x^2+1) = +\infty$. Par composition, il vient $\lim_{x\to-\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$, d'où $\lim_{x\to-\infty} 5\ln(x^2+1) = +\infty$.
De plus, $\lim_{x\to-\infty} -3x = +\infty$.
Par somme de limites de fonctions, on conclut immédiatement :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

3. (a) Soit x un réel strictement positif. Factorisons par x^2 au sein du logarithme :

$$x^2 + 1 = x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

En appliquant les propriétés du logarithme népérien, on a alors :

$$\ln(x^2 + 1) = \ln\left(x^2\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

Comme $x > 0$, $\ln(x^2) = 2\ln x$. L'expression de la fonction f devient :

$$f(x) = 5\left(2\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) - 3x = 10\ln x - 3x + 5\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

En factorisant par x sur les deux premiers termes, on obtient bien l'expression demandée :

$$f(x) = x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

(b) Déterminons la limite en $+\infty$ en exploitant cette nouvelle écriture :
Par les théorèmes de croissances comparées, on sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, ce qui implique que $\lim_{x\to+\infty}\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) = -3$.
Comme $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, alors, par produit $\lim_{x\to+\infty} x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) = -\infty$.
Par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$, ce qui donne par continuité de la fonction ln en 1 que $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$. Par somme de limites, on en conclut :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

4. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. En appliquant la formule de dérivation des fonctions composées $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto x^2 + 1$, on trouve que pour tout réel x :

$$f'(x) = 5 \times \frac{2x}{x^2 + 1} - 3 = \frac{10x}{x^2 + 1} - \frac{3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}$$

(b) Pour tout réel x, le dénominateur $x^2 + 1$ est strictement positif. Le signe de la fonction dérivée f' correspond donc exclusivement au signe du polynôme du second degré du numérateur : $P(x) = -3x^2 + 10x - 3$. Calculons son discriminant :

$$\Delta = 10^2 - 4 \times (-3) \times (-3) = 100 - 36 = 64 = 8^2$$

Le discriminant étant strictement positif, le polynôme possède deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-10 + 8}{2 \times (-3)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-10 - 8}{2 \times (-3)} = \frac{-18}{-6} = 3$$

Le coefficient du terme du second degré étant négatif ($-3 < 0$), le numérateur est strictement positif entre ses racines et négatif à l'extérieur. On en conclut le schéma de variations suivant :

— Pour tout $x \in]-\infty\,;\,\frac{1}{3}[\cup]3\,;\,+\infty[$, $f'(x) < 0$, la fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,\frac{1}{3}]$ et sur $[3\,;\,+\infty[$.

— Pour tout $x \in]\frac{1}{3}\,;\,3[$, $f'(x) > 0$, la fonction f est donc strictement croissante sur $[\frac{1}{3}\,;\,3]$.

5. (a) L'étude de la convexité s'appuie sur le signe de la dérivée seconde, donnée par $f''(x) = \frac{-10x^2+10}{(x^2+1)^2}$. Le dénominateur étant un carré parfait, il est strictement positif pour tout réel x. Le signe de $f''(x)$ est donc celui de son numérateur $-10x^2 + 10 = 10(1 - x^2)$.

   — $1 - x^2 \geqslant 0 \iff x^2 \leqslant 1 \iff x \in [-1\,;\,1]$

   — $1 - x^2 \leqslant 0 \iff x^2 \geqslant 1 \iff x \in]-\infty\,;\,-1] \cup [1\,;\,+\infty[$

   On en déduit que la fonction f est convexe sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ et concave sur les intervalles $]-\infty\,;\,-1]$ et $[1\,;\,+\infty[$. Cela valide la conjecture émise à la question **1**.

   (b) L'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 s'écrit $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$. Calculons les valeurs numériques de ces coefficients :

$$f(1) = 5\ln(1^2 + 1) - 3 \times 1 = 5\ln(2) - 3$$

$$f'(1) = \frac{-3 \times 1^2 + 10 \times 1 - 3}{1^2 + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

   En injectant ces résultats, on obtient l'équation de cette droite :

$$y = 2(x - 1) + 5\ln(2) - 3 = 2x - 2 + 5\ln(2) - 3 \text{ soit } y = 2x + 5\ln(2) - 5$$

   (c) D'après la question **5.a**, la fonction f est concave sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$. Par propriété de cours, la courbe représentative d'une fonction concave se situe systématiquement en dessous de toutes ses tangentes sur son intervalle de concavité. Pour tout réel $x \geqslant 1$, nous pouvons donc formuler l'inégalité suivante :

$$f(x) \leqslant 2x + 5\ln(2) - 5$$

   En remplaçant la fonction f par son expression analytique originelle, il vient :

$$5\ln\left(x^2 + 1\right) - 3x \leqslant 2x + 5\ln(2) - 5$$

   Ajoutons $3x$ de chaque côté de l'inéquation :

$$5\ln\left(x^2 + 1\right) \leqslant 5x + 5\ln(2) - 5$$

   Divisons enfin la totalité des termes de l'inégalité par le nombre réel strictement positif 5, ce qui ne modifie pas le sens de l'orientation de l'inéquation :

$$\ln\left(x^2 + 1\right) \leqslant x + \ln(2) - 1$$