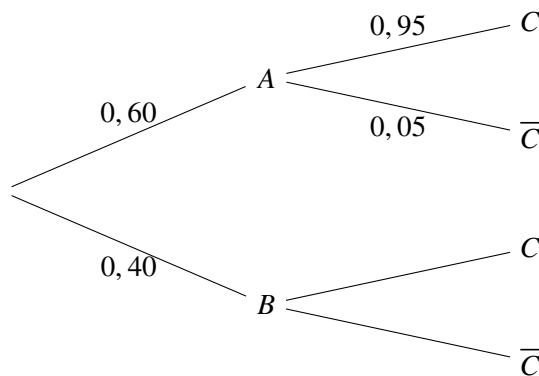


## Exercice 1

### Partie A

1. D'après l'énoncé, nous savons que  $P(A) = 0,60$  et  $P_A(C) = 0,95$ . Comme les événements  $A$  et  $B$  réalisent une partition de l'univers, on a  $P(B) = 1 - P(A) = 0,40$ . De plus,  $P_A(\bar{C}) = 1 - P_A(C) = 0,05$ . L'arbre complété est le suivant :



2. (a) Nous cherchons à déterminer  $P(A \cap C)$ . Par définition des probabilités conditionnelles :

$$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0,60 \times 0,95 = 0,57$$

- (b) Les événements  $A$  et  $B$  forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$$

On sait que  $P(C) = 0,91$ , ainsi :

$$0,91 = 0,57 + P(B \cap C)$$

Ainsi,  $P(B \cap C) = 0,91 - 0,57 = 0,34$ . Or, on a  $P(B \cap C) = P(B) \times P_B(C)$ , ce qui nous donne :

$$0,40 \times P_B(C) = 0,34$$

Finalement,  $P_B(C) = \frac{0,34}{0,40} = 0,85$ .

- (c) Nous cherchons à évaluer et comparer  $P_{\bar{C}}(A)$  et  $P_{\bar{C}}(B)$ .

On a pour commencer  $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,91 = 0,09$ .

Ainsi, par définition des probabilités conditionnelles :

$$P_{\bar{C}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(A) \times P_A(\bar{C})}{0,09} = \frac{0,60 \times 0,05}{0,09} = \frac{0,03}{0,09} = \frac{1}{3}$$

et donc, d'autre part :

$$P_{\bar{C}}(B) = 1 - P_{\bar{C}}(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

On observe que  $2 \times P_{\bar{C}}(A) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = P_{\bar{C}}(B)$ . Le responsable des achats a donc raison.

## Partie B

1. (a) Le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise, réalisant 15 épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques. Le succès, défini par "la tomate n'est pas commercialisable", a une probabilité  $p = P(\bar{C}) = 0,09$ . Ainsi, la variable aléatoire  $X$  qui compte le nombre de succès de ce prélèvement suit la loi binomiale de paramètres  $n = 15$  et  $p = 0,09$ .
- (b) La probabilité qu'exactement deux tomates soient non commercialisables est :

$$P(X = 2) = \binom{15}{2} \times 0,09^2 \times (1 - 0,09)^{15-2} = 105 \times 0,09^2 \times 0,91^{13} \approx 0,250$$

- (c) La probabilité qu'au plus deux tomates soient non commercialisables est :

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

À la calculatrice, on trouve  $P(X \leq 2) \approx 0,853$ .

2. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $X_n$  suit la loi  $\mathcal{B}(n; 0,09)$ , son espérance est  $E(X_n) = n \times 0,09$  et sa variance est  $V(X_n) = n \times 0,09 \times (1 - 0,09) = n \times 0,09 \times 0,91 = 0,0819n$ .
- (b) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(F_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{n \times 0,09}{n} = 0,09$$

Pour la variance, on a :

$$V(F_n) = V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(X_n) = \frac{0,0819n}{n^2} = \frac{0,0819}{n}$$

- (c) On cherche à minorer  $P(0,04 < F_n < 0,14)$ . On a :

$$0,04 < F_n < 0,14 \iff 0,04 - 0,09 < F_n - 0,09 < 0,14 - 0,09 \iff -0,05 < F_n - 0,09 < 0,05$$

Ce qui équivaut à  $P(|F_n - 0,09| < 0,05)$ .

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel  $\delta > 0$  :

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(F_n)}{\delta^2}$$

En choisissant  $\delta = 0,05$  et en passant à l'événement contraire, on obtient :

$$P(|F_n - E(F_n)| < \delta) \geq 1 - \frac{V(F_n)}{\delta^2}$$

Ainsi :

$$P(|F_n - 0,09| < 0,05) \geq 1 - \frac{0,0819/n}{0,05^2}$$

Or,  $\frac{0,0819}{0,0025} = 32,76$ . On a bien démontré que  $P(0,04 < F_n < 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{n}$ .

- (d) Pour un échantillon de taille  $n = 500$ , la fréquence de tomates non commercialisables observée est  $f_{obs} = \frac{55}{500} = 0,11$ .

En utilisant la formule de la question précédente, la probabilité que la fréquence appartienne à l'intervalle  $]0,04; 0,14[$  est supérieure ou égale à  $1 - \frac{32,76}{500} = 1 - 0,06552 = 0,93448$ .

On remarque que  $f_{obs} = 0,11 \in ]0,04; 0,14[$ . Ce résultat appartient donc très largement à l'intervalle dans lequel la fréquence a plus de 93,4% de chance de se trouver. Ce prélèvement est donc conforme aux attentes.

## Exercice 2

### Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Résolvons l'équation  $f(x) = x$  :

$$f(x) = x \iff \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = x \iff \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - x = 0 \iff x \left( \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Soit  $x = 0$ , soit :

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \iff \sqrt{1+x^2} = 2 \iff 1+x^2 = 4 \iff x^2 = 3$$

Finalement, l'équation  $f(x) = x$  admet pour ensemble de solutions  $\mathcal{S} = \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$ .

2. (a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant jamais sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On pose  $u(x) = 2x$  et  $v(x) = \sqrt{1+x^2}$ . On a  $u'(x) = 2$  et  $v'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ . Alors,

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{2\sqrt{1+x^2} - 2x \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\frac{2(1+x^2) - 2x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

- (b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $1+x^2 > 0$  et  $\sqrt{1+x^2} > 0$ . Ainsi, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) > 0$ . On en déduit que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrons par récurrence la proposition  $\mathcal{P}_n$  :  $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$ .

**Initialisation** : Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 1$ . Par ailleurs,  $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{2 \times 1}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ . On a bien  $1 \leq 1 \leq \sqrt{2} < \sqrt{3}$ , c'est-à-dire  $1 \leq u_0 \leq u_1 < \sqrt{3}$ . Ainsi,  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

**Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $\mathcal{P}_n$  soit vraie. On a alors :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$$

Comme la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  d'après la partie A, elle préserve l'ordre, on a donc :

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(\sqrt{3})$$

Or, on a vu que  $f(1) = \sqrt{2} \geq 1$  et d'après la résolution de l'équation  $f(x) = x$ , on a  $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ . On obtient :

$$1 \leq \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < \sqrt{3}$$

Ainsi,  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

**Conclusion** : Par le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$ .

2. D'après la question précédente, la suite  $(u_n)$  est croissante ( $u_n \leq u_{n+1}$ ) et majorée par  $\sqrt{3}$ . D'après le théorème de convergence monotone, la suite  $(u_n)$  est convergente vers une limite finie que l'on note  $\ell$ .

3. La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Par passage à la limite dans la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on a  $f(\ell) = \ell$ .

D'après la partie A, les solutions de cette équation sont  $-\sqrt{3}$ , 0 et  $\sqrt{3}$ . Comme, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1$ , on a par passage à la limite  $\ell \geq 1$ .

La seule limite possible est  $\ell = \sqrt{3}$ .

4. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimons  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$  :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3 - u_{n+1}^2} = \frac{(f(u_n))^2}{3 - (f(u_n))^2} = \frac{\left(\frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)^2}{3 - \left(\frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)^2} = \frac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{3 - \frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}$$

En réduisant au même dénominateur :

$$v_{n+1} = \frac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{\frac{3(1+u_n^2) - 4u_n^2}{1+u_n^2}} = \frac{4u_n^2}{3 + 3u_n^2 - 4u_n^2} = \frac{4u_n^2}{3 - u_n^2} = 4 \left( \frac{u_n^2}{3 - u_n^2} \right) = 4v_n$$

De plus,  $v_0 = \frac{u_0^2}{3 - u_0^2} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} = 0,5$ .

Ainsi, la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 4$  et de premier terme  $v_0 = 0,5$ .

- (b) D'après le terme général d'une suite géométrique, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_n = v_0 \times q^n = 0,5 \times 4^n$$

De plus, on a  $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$ , donc  $v_n(3 - u_n^2) = u_n^2$  puis  $3v_n - v_n u_n^2 = u_n^2$  et  $3v_n = u_n^2(1 + v_n)$ .

On en déduit que  $u_n^2 = \frac{3v_n}{1+v_n} = \frac{1,5 \times 4^n}{1+0,5 \times 4^n}$ .

Comme pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 1$  d'après la question 1, on a  $u_n > 0$ , et donc :

$$u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}}$$

- (c) On peut réécrire  $u_n$  en factorisant par  $4^n$  au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{4^n(4^{-n} + 0,5)}} = \sqrt{\frac{1,5}{4^{-n} + 0,5}}$$

Comme  $4 > 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^{-n} = 0$ . Par opérations sur les limites, la limite de ce qui est sous la racine est  $\frac{1,5}{0,5} = 3$ . Par composition avec la fonction racine carrée, continue en 3, on obtient à nouveau  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$ .

### Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

1. Voici le script Python complété pour calculer et lister les sommes  $S_1, S_2, \dots, S_p$  :

```
1 from math import *
2 def termes(p):
3     u = 1
4     S = 0
5     L = []
6     for i in range(p):
7         S = S + u**2
8         u = 2*u / sqrt(1 + u**2)
9         L.append(S)
10    return L
```

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question B.1, pour tout entier naturel  $k$ , on a  $1 \leq u_k \leq \sqrt{3}$ .

Comme la fonction carré est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ , on a pour tout  $k$  :

$$1^2 \leq u_k^2 \leq (\sqrt{3})^2 \text{ donc } 1 \leq u_k^2 \leq 3$$

En écrivant cette double inégalité pour tous les indices de 0 à  $n - 1$ , on obtient :

$$1 \leq u_0^2 \leq 3$$

$$1 \leq u_1^2 \leq 3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$1 \leq u_{n-1}^2 \leq 3$$

En sommant membre à membre ces  $n$  inégalités, il vient :

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ termes}} \leq u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2 \leq \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{n \text{ termes}}$$

On reconnaît l'expression de  $S_n$  au centre. Ainsi :

$$n \leq S_n \leq 3n$$

3. D'après l'inégalité de la question précédente,  $S_n \geq n$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ . Par le théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

Pour le second rapport, on divise l'inégalité précédente par  $n^2$  (avec  $n > 0$ ) :

$$\frac{n}{n^2} \leq \frac{S_n}{n^2} \leq \frac{3n}{n^2} \iff \frac{1}{n} \leq \frac{S_n}{n^2} \leq \frac{3}{n}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$ . D'après le théorème des gendarmes, on conclut donc que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2} = 0$$

## Exercice 3

1. Une représentation paramétrique de  $\Delta$  est : 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

Pour  $t = 0$ , on obtient  $x = 1$ ,  $y = 1$  et  $z = 1$ , ce qui correspond aux coordonnées du point  $C(1; 1; 1)$ . Ainsi, la droite  $\Delta$  passe par le point  $C$ .

Si le point  $A(4; 2; 2)$  appartenait à la droite  $\Delta$ , il existerait un réel  $t$  tel que : 
$$\begin{cases} 4 = 1 + 2t \rightarrow t = 1,5 \\ 2 = 1 + t \rightarrow t = 1 \\ 2 = 1 + 2t \rightarrow t = 0,5 \end{cases} \quad \text{Ce}$$
 système n'admet aucune solution, le point  $A$  n'appartient pas à la droite  $\Delta$ .

2. (a) Le plan  $\mathcal{P}$  est perpendiculaire à la droite  $\Delta$ . Un vecteur directeur de  $\Delta$ , que l'on lit sur la représentation paramétrique, est  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Ce vecteur est donc un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$ .

(b) Une équation cartésienne de  $\mathcal{P}$  est de la forme  $2x + y + 2z + d = 0$ .

Le point  $A(4; 2; 2)$  appartient à  $\mathcal{P}$ , ses coordonnées vérifient l'équation :

$$2 \times 4 + 2 + 2 \times 2 + d = 0 \iff 8 + 2 + 4 + d = 0 \iff 14 + d = 0 \iff d = -14$$

Finalement, une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$  est bien  $2x + y + 2z - 14 = 0$ .

- (c) Vérifions si  $B(5; -2; 3) \in \mathcal{P}$  :

$$2 \times 5 + (-2) + 2 \times 3 - 14 = 10 - 2 + 6 - 14 = 16 - 16 = 0$$

Ainsi, le plan  $\mathcal{P}$  passe bien par le point  $B$ .

Vérifions si  $C(1; 1; 1) \in \mathcal{P}$  :

$$2 \times 1 + 1 + 2 \times 1 - 14 = 2 + 1 + 2 - 14 = 5 - 14 = -9 \neq 0$$

Ainsi, le plan  $\mathcal{P}$  ne passe pas par le point  $C$ .

3. (a) Pour que  $D(3; 2; 3)$  soit le projeté orthogonal de  $C$  sur  $\mathcal{P}$ , il faut que  $D \in \mathcal{P}$  et que les vecteurs  $\vec{CD}$  et  $\vec{n}$  soient colinéaires.

Vérifions si  $D \in \mathcal{P}$  :  $2(3) + 2 + 2(3) - 14 = 6 + 2 + 6 - 14 = 0$ . Ainsi,  $D \in \mathcal{P}$ .

Vérifions la colinéarité :  $\vec{CD} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . On constate que  $\vec{CD} = \vec{n}$ . Les vecteurs sont donc colinéaires

(le vecteur  $\vec{CD}$  est normal au plan  $\mathcal{P}$ ).

Finalement, le point  $D$  est bien le projeté orthogonal du point  $C$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .

- (b)

- (c) Les points  $A$  et  $B$  appartiennent au plan  $\mathcal{P}$  (question 2). Le point  $D$  appartient également au plan  $\mathcal{P}$  (question 3.a).

- (d) Le vecteur  $\vec{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$  et le vecteur  $\vec{AD}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Leurs coordonnées ne sont manifestement pas proportionnelles, les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$  ne sont donc pas colinéaires. Les points  $A$ ,  $B$  et  $D$  ne sont pas alignés et définissent ainsi de manière unique le plan  $\mathcal{P}$ .

En revanche, le point  $C$  n'appartient pas au plan  $\mathcal{P}$  (question 2.b). Ainsi, les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ne sont pas coplanaires.

- (e) Le vecteur  $\vec{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 5-4 \\ -2-2 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (f) Le vecteur  $\vec{AD}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 3-4 \\ 2-2 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Puisque le repère est orthonormé, le produit scalaire est :  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 1 \times (-1) + (-4) \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 0 + 1 = 0$ .

Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$  sont orthogonaux.

- (g) Le volume du tétraèdre  $ABCD$  dont la base choisie est le triangle  $ABD$  est donné par  $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABD} \times h$ .

Puisque  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$ , le triangle  $ABD$  est rectangle en  $A$ .

Son aire est  $\mathcal{A}_{ABD} = \frac{1}{2} \times AB \times AD$ .

$$AB = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$AD = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\mathcal{A}_{ABD} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3$$

La hauteur  $h$  relative à la base  $ABD$  (incluse dans le plan  $\mathcal{P}$ ) issue de  $C$  correspond à la distance  $CD$ .

$CD = \|\vec{CD}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$ . Le volume est donc :

$$V = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 = 3$$

4. (a) Pour vérifier que  $H(\frac{73}{29}; \frac{-4}{29}; \frac{51}{29})$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(BC)$ , il faut s'assurer que  $H \in (BC)$  et que  $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$ .

Le vecteur  $\vec{BC}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 1-5 \\ 1-(-2) \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Calculons les coordonnées de  $\vec{AH}$  :  $\begin{pmatrix} \frac{73}{29}-4 \\ \frac{-4}{29}-2 \\ \frac{51}{29}-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{73-116}{29} \\ \frac{-4-58}{29} \\ \frac{51-58}{29} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-43}{29} \\ \frac{-62}{29} \\ \frac{-7}{29} \end{pmatrix}$ .

Vérifions l'orthogonalité :

$$\vec{AH} \cdot \vec{BC} = \left(\frac{-43}{29}\right)(-4) + \left(\frac{-62}{29}\right)(3) + \left(\frac{-7}{29}\right)(-2) = \frac{172 - 186 + 14}{29} = \frac{0}{29} = 0$$

Calculons les coordonnées de  $\vec{BH}$  :  $\begin{pmatrix} \frac{73}{29}-5 \\ \frac{-4}{29}-(-2) \\ \frac{51}{29}-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-72}{29} \\ \frac{54}{29} \\ \frac{-36}{29} \end{pmatrix}$ .

On remarque que  $\vec{BH} = \frac{18}{29} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{18}{29} \vec{BC}$ . Les vecteurs  $\vec{BH}$  et  $\vec{BC}$  sont colinéaires, ainsi les points  $B, H, C$  sont alignés et  $H \in (BC)$ .

- (b) L'aire du triangle  $ABC$  dont la base est  $[BC]$  s'exprime par  $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} BC \times AH$ .

$$BC = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}$$

$$AH = \sqrt{\left(\frac{-43}{29}\right)^2 + \left(\frac{-62}{29}\right)^2 + \left(\frac{-7}{29}\right)^2} = \sqrt{\frac{1849 + 3844 + 49}{29^2}} = \frac{\sqrt{5742}}{29}$$

Ainsi, l'aire du triangle  $ABC$  est :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{29} \times \frac{\sqrt{5742}}{29} = \frac{\sqrt{5742}}{2\sqrt{29}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5742}{29}}$$

Or,  $\frac{5742}{29} = 198 = 9 \times 22$ .

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{198} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{22} = \frac{3\sqrt{22}}{2}$$

- (c) Le volume du tétraèdre  $ABCD$  peut aussi se calculer en prenant pour base le triangle  $ABC$  :  $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times d(D, (ABC))$ .

On sait d'après la question 3.d que  $V = 3$ . En utilisant le résultat de la question précédente :

$$3 = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{22}}{2} \times d(D, (ABC)) \iff 3 = \frac{\sqrt{22}}{2} \times d(D, (ABC))$$

Ainsi,  $d(D, (ABC)) = \frac{6}{\sqrt{22}} = \frac{3\sqrt{22}}{11}$ .

## Exercice 4

- Soit  $x \in ]0; +\infty[$ . La fonction  $f$  est définie par  $f(x) = x(\ln x)^2$ .
- On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ . Par composition  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$ .  
Par produit, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3. (a) Soit  $x > 0$ . On a  $g(x) = x \ln x$ . En remplaçant  $x$  par  $\sqrt{x}$  dans l'expression de  $g$  :

$$g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \times \left(\frac{1}{2} \ln x\right)$$

En élevant au carré, puis en multipliant par 4 :

$$4(g(\sqrt{x}))^2 = 4 \left( \sqrt{x} \times \frac{1}{2} \ln x \right)^2 = 4 \left( x \times \frac{1}{4} (\ln x)^2 \right) = x(\ln x)^2 = f(x)$$

On a bien  $f(x) = 4(g(\sqrt{x}))^2$  pour tout réel  $x > 0$ .

- (b) On pose  $X = \sqrt{x}$ . Lorsque  $x \rightarrow 0$ ,  $X \rightarrow 0$  par valeurs positives.

On sait, par croissance comparée, que  $\lim_{X \rightarrow 0} X \ln X = 0$ , ainsi  $\lim_{x \rightarrow 0} g(\sqrt{x}) = 0$ . Par continuité de la fonction carré en 0, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4 \times 0^2 = 0$$

4. (a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Soit  $x > 0$ . On pose  $u(x) = x$  et  $v(x) = (\ln x)^2$ . On a  $u'(x) = 1$  et, par composition (ou produit),  $v'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$ . Ainsi,

$$f'(x) = 1 \times (\ln x)^2 + x \times \left(2 \frac{\ln x}{x}\right) = (\ln x)^2 + 2 \ln x = (\ln x)(\ln x + 2)$$

On a bien, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$ .

- (b) Étudions le signe de  $f'(x)$  sur  $]0; +\infty[$ . Soit  $x > 0$ .

$$\ln x = 0 \iff x = 1 \text{ et } \ln x > 0 \iff x > 1$$

$$2 + \ln x = 0 \iff \ln x = -2 \iff x = e^{-2} \text{ et } 2 + \ln x > 0 \iff \ln x > -2 \iff x > e^{-2}$$

On peut alors dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  :

| $x$         | 0 | $e^{-2}$  | 1 | $+\infty$ |
|-------------|---|-----------|---|-----------|
| $\ln x$     |   | -         | 0 | +         |
| $2 + \ln x$ |   | -         | 0 | +         |
| $f'(x)$     |   | +         | 0 | +         |
| $f$         | 0 | $4e^{-2}$ | 0 | $+\infty$ |

La valeur du maximum local est  $f(e^{-2}) = e^{-2}(\ln(e^{-2}))^2 = e^{-2}(-2)^2 = 4e^{-2}$ .

- (c) D'après le tableau de variations, sur l'intervalle  $]0; 1]$ , la fonction  $f$  atteint un maximum en  $x = e^{-2}$ . La valeur exacte de ce maximum est  $4e^{-2} = \frac{4}{e^2}$ .

5. (a) Sur l'intervalle  $]0; 1]$ , le maximum de la fonction  $f$  est  $\frac{4}{e^2} \approx \frac{4}{7,389} < 1$ . Puisque  $2 > 1$ , l'équation  $f(x) = 2$  n'a pas de solution sur  $]0; 1]$ . Sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ , la fonction  $f$  est continue (car dérivable) et strictement croissante. De plus,  $f(1) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .



Le réel 2 appartient à l'intervalle image  $[0; +\infty[$ . D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 2$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ , et donc sur  $]0; +\infty[$ .

- (b) À l'aide d'une calculatrice, on trouve :  $f(2,4) \approx 1,83 < 2$  et  $f(2,5) \approx 2,09 > 2$ . Ainsi, un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,1 est  $2,4 < \alpha < 2,5$ .

6. (a) La fonction  $f$  est continue et positive sur l'intervalle  $[a; 1]$ . L'intégrale  $\int_a^1 f(x) dx$  représente donc l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe représentative de  $f$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = 1$ .
- (b) Soit  $x \in [a, 1]$ . On pose  $u(x) = (\ln x)^2$  et  $v'(x) = x$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $[a; 1]$  et leurs dérivées sont continues. On a  $u'(x) = 2\frac{\ln x}{x}$  et on choisit  $v(x) = \frac{x^2}{2}$ . La formule de l'intégration par parties donne :

$$\int_a^1 x(\ln x)^2 dx = \left[ \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2} \left( 2 \frac{\ln x}{x} \right) dx$$

$$\int_a^1 f(x) dx = \left( \frac{1^2}{2} (\ln 1)^2 - \frac{a^2}{2} (\ln a)^2 \right) - \int_a^1 x \ln x dx$$

Comme  $\ln 1 = 0$ , on obtient bien :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 - \int_a^1 x \ln x dx$$

- (c) Effectuons une nouvelle intégration par parties pour calculer  $\int_a^1 x \ln x dx$ . On pose  $u(x) = \ln x$  et  $v'(x) = x$ . On a  $u'(x) = \frac{1}{x}$  et on choisit  $v(x) = \frac{x^2}{2}$ .

$$\int_a^1 x \ln x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \left( 0 - \frac{a^2}{2} \ln a \right) - \int_a^1 \frac{x}{2} dx$$

$$\int_a^1 x \ln x dx = -\frac{a^2}{2} \ln a - \left[ \frac{x^2}{4} \right]_a^1 = -\frac{a^2}{2} \ln a - \left( \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4} \right) = -\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}$$

En réinjectant ce résultat dans l'expression de la question 5.b, on obtient :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 - \left( -\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} \right) = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 + \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$$

- (d) Déterminons la limite de chaque terme lorsque  $a \rightarrow 0$  :

On sait, par croissance comparée, que  $\lim_{a \rightarrow 0} a \ln a = 0$ .

Le premier terme peut s'écrire  $-\frac{1}{2}(a \ln a)^2$ . Par continuité de la fonction carré,  $\lim_{a \rightarrow 0} (a \ln a)^2 = 0^2 = 0$

donc  $\lim_{a \rightarrow 0} -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 = 0$ .

Le second terme peut s'écrire  $\frac{a}{2} \times (a \ln a)$ . Ainsi,  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2}{2} \ln a = 0$ .

Enfin,  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2}{4} = 0$ .

Par somme des limites, on obtient donc :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 f(x) dx = \frac{1}{4}$$