

EAM 1ère générale tronc commun, Amérique du nord

Première partie : QCM

1. **Réponse b.** On sait que $A - B > 0$. En ajoutant B aux deux membres de cette inégalité, on obtient immédiatement $A > B$.

2. **Réponse d.** En respectant la priorité de la multiplication, et afin d'éviter des calculs superflus sans calculatrice, on simplifie la fraction avant d'additionner :

$$C = \frac{1}{2} + 3 \times \frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{3 \times 5}{3 \times 2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

3. **Réponse a.** En utilisant la propriété usuelle des puissances stipulant que pour tout réel a et tous entiers n et m , $a^n \times a^m = a^{n+m}$, on a :

$$D = 3 \times 2^5 \times 2^3 = 3 \times 2^{5+3} = 3 \times 2^8$$

4. **Réponse d.** On cherche un ordre de grandeur. Le nombre 999 est très proche de 1000 et 1001 l'est également. Le produit est donc extrêmement proche de $1000 \times 1000 = 1\,000\,000$.

5. **Réponse a.** En développant à l'aide de l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, on obtient :

$$(x+2)^2 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$$

6. **Réponse d.** On résout l'équation du premier degré :

$$3x - 5 = x + 3$$

En soustrayant x et en ajoutant 5 de chaque côté de l'égalité, il vient :

$$2x = 8$$

En divisant par 2, on obtient $x = 4$.

7. **Réponse b.** On calcule la quantité correspondant à 40 % d'un total de 60 chocolats :

$$\frac{40}{100} \times 60 = \frac{4 \times 10 \times 6 \times 10}{10 \times 10} = 6 \times 4 = 24$$

8. **Réponse c.** Une baisse de 10 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - 0,10 = 0,90$. Une seconde baisse de 20 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - 0,20 = 0,80$. Le coefficient multiplicateur global est le produit des deux : $0,90 \times 0,80 = 0,72$. Le taux d'évolution global t vérifie $1 + t = 0,72$, soit $t = 0,72 - 1 = -0,28$. Cela correspond bien à une baisse de 28 %.

9. **Réponse a.** Par lecture graphique, la droite coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0;3), ce qui signifie que l'ordonnée à l'origine vaut 3. De plus, la droite passe par le point de coordonnées (1;1). Le coefficient directeur m se calcule par :

$$m = \frac{1 - 3}{1 - 0} = \frac{-2}{1} = -2$$

L'équation réduite de la droite est donc $y = -2x + 3$.

10. **Réponse a.** On cherche à exprimer la variable v à partir de l'égalité $E = \frac{1}{2}mv^2$. En multipliant les deux membres par 2, on obtient $2E = mv^2$. La masse m d'un véhicule étant non nulle, on peut diviser par m : $v^2 = \frac{2E}{m}$. Puisque la vitesse v est une grandeur positive, on en déduit que $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$.
11. **Réponse b.** Résoudre l'équation $h(x) = 2$ revient, graphiquement, à déterminer les abscisses des points d'intersection entre la courbe représentative de la fonction h et la droite horizontale d'équation $y = 2$. On relève sur le graphique trois points d'intersection, dont les abscisses respectives sont -2 , 2 et 3 . L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \{-2; 2; 3\}$.
12. **Réponse c.** Pour la première série (9; 11; 13), la moyenne est $\frac{9+11+13}{3} = \frac{33}{3} = 11$ et la médiane est la valeur centrale, soit 11. Pour la seconde série, une fois ordonnée dans l'ordre croissant (9; 10; 11; 13; 17), la moyenne est $\frac{9+10+11+13+17}{5} = \frac{60}{5} = 12$. L'effectif total étant de 5, la médiane est la troisième valeur, soit 11. Les moyennes sont donc différentes ($11 \neq 12$) mais les médianes sont égales.

Deuxième partie

Exercice 1

Partie A : Premier modèle

- Le modèle stipule que la population augmente d'une quantité constante de 20 individus chaque année. Ainsi, pour tout entier naturel n , on a la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 20$. La suite (u_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 20$ et de premier terme $u_0 = 200$.
- Le mois de juin 2025 correspond au rang $n = 2025 - 2019 = 6$. En utilisant la formule explicite du terme général d'une suite arithmétique, $u_n = u_0 + n \times r$, on calcule :

$$u_6 = 200 + 6 \times 20 = 200 + 120 = 320$$

Selon ce modèle, on peut estimer la population à 320 marmottes en juin 2025.

- Le décompte réel révèle la présence de 355 individus, un nombre significativement supérieur à l'estimation de 320 fournie par la suite (u_n) . L'évolution de la population ne semble donc pas être strictement linéaire : ce premier modèle n'est pas parfaitement adapté à la situation observée sur le terrain.

Partie B : Second modèle

- Le taux d'évolution de la population entre juin 2019 et juin 2020 s'évalue par le calcul suivant :

$$t = \frac{\text{Valeur finale} - \text{Valeur initiale}}{\text{Valeur initiale}} = \frac{220 - 200}{200} = \frac{20}{200} = \frac{1}{10} = 0,10$$

La population a donc augmenté de 10% entre ces deux dates.

- (a) Ce second modèle suppose une augmentation annuelle constante de 10%. Augmenter une grandeur de 10 % revient à la multiplier par le coefficient $1 + \frac{10}{100} = 1,1$. Pour tout entier naturel n , on a donc $v_{n+1} = 1,1 \times v_n$. La suite (v_n) est ainsi une suite géométrique de raison $q = 1,1$, dont le premier terme est $v_0 = 200$.

- (b) D'après le cours sur les suites géométriques, l'expression explicite du terme général est donnée par :

$$v_n = v_0 \times q^n = 200 \times 1,1^n$$

3. (a) L'année 2025 correspond, comme vu précédemment, au rang $n = 6$. En lisant directement la valeur associée à l'indice 6 dans la colonne H du tableur fourni, on trouve 354. Ce nouveau modèle estime donc la population à 354 marmottes en juin 2025.
- (b) La valeur estimée par ce modèle (354) est extrêmement proche de la valeur réellement observée sur le terrain en 2025 (355). Contrairement au premier essai, ce modèle exponentiel s'avère tout à fait pertinent pour décrire l'évolution de cette population.
- (c) Il s'agit de trouver la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $v_n > 400$. En consultant la deuxième ligne du tableur, on observe que $v_7 = 390$ et $v_8 = 429$. Le seuil des 400 individus est par conséquent franchi pour $n = 8$. L'année correspondante est $2019 + 8 = 2027$. La population dépassera donc les 400 individus en juin 2027.

Exercice 2

1. On choisit un adhérent au hasard parmi l'ensemble des 200 membres de la salle de sport, ce qui place l'expérience dans une situation d'équiprobabilité. D'après la dernière ligne du tableau (total des femmes), il y a 100 femmes.

$$P(F) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2} = 0,5$$

2. L'événement "l'adhérent est un homme qui pratique le step" correspond à l'intersection $H \cap S$. À l'intersection de la ligne "Homme" et de la colonne "Step" du tableau, on lit un effectif de 20 personnes. La probabilité associée est donc :

$$P(H \cap S) = \frac{20}{200} = \frac{1}{10} = 0,1$$

3. L'événement $F \cap S$ traduit le fait que l'adhérent choisi est une femme et pratique le step. Le tableau indique que 60 femmes pratiquent cette activité.

$$P(F \cap S) = \frac{60}{200} = \frac{3}{10} = 0,3$$

4. Afin de vérifier si les événements F et S sont indépendants, il convient de comparer la valeur de $P(F \cap S)$ avec le produit $P(F) \times P(S)$. Le nombre total de pratiquants du step est de 80, donc $P(S) = \frac{80}{200} = \frac{4}{10} = 0,4$. Calculons le produit :

$$P(F) \times P(S) = 0,5 \times 0,4 = 0,2$$

Or, d'après la question précédente, on sait que $P(F \cap S) = 0,3$. Comme $P(F \cap S) \neq P(F) \times P(S)$, on en conclut que les événements F et S ne sont pas indépendants.

5. La formulation indique que l'on se place dans l'univers restreint des femmes de la salle de sport. Il s'agit de déterminer la probabilité conditionnelle $P_F(C)$. Sur le total des 100 femmes adhérentes, la colonne "Crossfit" nous indique que 40 d'entre elles pratiquent cette activité.

$$P_F(C) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0,4$$

6. La probabilité demandée est $P_C(F)$, soit la probabilité que la personne choisie soit une femme, sachant qu'elle pratique le crossfit. L'univers restreint est ici l'ensemble des pratiquants de crossfit, dont l'effectif total est de 120. Parmi ces 120 pratiquants, l'effectif des femmes est de 40. On obtient ainsi :

$$P_C(F) = \frac{40}{120}$$

En simplifiant le numérateur et le dénominateur par leur facteur commun 40, on aboutit à la fraction irréductible :

$$P_C(F) = \frac{1}{3}$$

Exercice 3

1. (a) On relève graphiquement l'ordonnée du point de la courbe représentative de la fonction f qui a pour abscisse $x = 3$. Ce point a pour ordonnée 5, ainsi :

$$f(3) = 5$$

- (b) Le nombre dérivé $f'(-1)$ est défini géométriquement comme le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1 , c'est-à-dire au point A . En observant le tracé de cette droite, on constate qu'elle passe par le point $A(-1;5)$ et par le point de l'axe des ordonnées $(0;9)$. Le coefficient directeur se calcule par :

$$m = \frac{9-5}{0-(-1)} = \frac{4}{1} = 4$$

Par conséquent, $f'(-1) = 4$.

2. (a) La fonction f , définie par l'expression $f(x) = -x^2 + 2x + 8$, est une fonction polynôme du second degré, dérivable sur l'intervalle $[-2;4]$. En appliquant les règles usuelles de dérivation, on obtient pour tout réel $x \in [-2;4]$:

$$f'(x) = -2x + 2$$

- (b) L'étude du signe de la fonction dérivée f' repose sur la résolution de l'inéquation associée.

$$-2x + 2 \geq 0$$

En soustrayant 2 aux deux membres :

$$-2x \geq -2$$

En divisant par -2 , qui est un nombre strictement négatif, on inverse le sens de l'inégalité :

$$x \leq 1$$

On en déduit que :

- $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [-2; 1[$
- $f'(x) = 0$ pour $x = 1$
- $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]1; 4]$

3. D'après le lien fondamental entre le signe de la fonction dérivée et le sens de variation de la fonction, on peut affirmer que :

- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-2; 1]$.

- La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1; 4]$.

Calculons les valeurs exactes des images aux bornes et au changement de variation pour dresser un tableau complet :

- $f(-2) = -(-2)^2 + 2(-2) + 8 = -4 - 4 + 8 = 0$;

- $f(1) = -(1)^2 + 2(1) + 8 = -1 + 2 + 8 = 9$;

- $f(4) = -(4)^2 + 2(4) + 8 = -16 + 8 + 8 = 0$

On résume ces informations dans le tableau de variations de la fonction f :

x	-2	1	4
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Variations de f			