

EAM 1ère spécialité, Centres étrangers 2026

Première partie : QCM

1. **Réponse b.** On cherche la probabilité de l'intersection $\overline{A} \cap B$.
On a $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_A(B) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$.

2. **Réponse c.** Soit N le nombre total d'élèves en première générale dans ce lycée. L'énoncé indique que les 150 élèves suivant la spécialité mathématiques représentent les $\frac{3}{5}$ du total. On a donc l'équation $\frac{3}{5} \times N = 150$.
Ainsi, on obtient $N = 150 \times \frac{5}{3} = \frac{750}{3} = 250$.

3. **Réponse a.** En remplaçant A et B par leurs valeurs :

$$\frac{A}{B} + 1 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} + 1 = \frac{1}{3} \times \frac{6}{5} + 1 = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 3}{5} + 1 = \frac{2}{5} + 1 = \frac{2}{5} + \frac{5}{5} = \frac{7}{5}$$

4. **Réponse c.** La droite d a pour équation réduite $y = \frac{1}{3}x + 1$.
Son ordonnée à l'origine est 1, ce qui élimine les éventuels graphiques ne passant pas par le point de coordonnées $(0; 1)$.
Son coefficient directeur est $\frac{1}{3}$. En avançant de 3 unités en abscisse, on doit monter de 1 unité en ordonnée. La droite doit donc passer par le point de coordonnées $(3; 2)$. Seul le graphique **c.** valide ces deux conditions.

5. **Réponse b.** On utilise l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = x^3$ et $b = 1$. On rappelle que pour tout réel x et tout entier naturel n et m , on a $(x^n)^m = x^{m \times n}$:

$$(x^3 - 1)^2 = (x^3)^2 - 2 \times x^3 \times 1 + 1^2 = x^6 - 2x^3 + 1$$

6. **Réponse c.** Une hausse de 20 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{20}{100} = 1,2$.

7. Une baisse de 50 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{50}{100} = 0,5$. Le coefficient multiplicateur global est le produit des deux : $1,2 \times 0,5 = 0,6$.
Le taux d'évolution global t vérifie $1 + t = 0,6$, soit $t = 0,6 - 1 = -0,40$. Cela correspond bien à une baisse globale de 40 %.

8. **Réponse d.** Remplissons les données manquantes du tableau.
Le total des élèves est de 25. Les élèves âgés de 16 ans ou moins sont au nombre de $8 + 7 = 15$.
On en déduit qu'il y a $25 - 15 = 10$ élèves de plus de 16 ans. Parmi ces 10 élèves de plus de 16 ans, 4 ne suivent pas la spécialité mathématiques. Donc $10 - 4 = 6$ élèves de plus de 16 ans la suivent.
On cherche la probabilité conditionnelle que l'élève suive la spécialité sachant qu'il a plus de 16 ans, soit $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

9. **Réponse d.** Exprimons y en fonction de x à partir de l'égalité initiale :

$$x = \frac{5}{2+y}$$

Puisque x et y sont strictement positifs, on peut multiplier par $(2 + y)$ et diviser par x :

$$2 + y = \frac{5}{x}$$

En soustrayant 2 de chaque côté, on obtient :

$$y = \frac{5}{x} - 2$$

Deuxième partie

Exercice 1

Partie A

- (a) La première année, la hauteur augmente de 40 cm, soit 0,4 mètre. On a donc $u_1 = u_0 + 0,4 = 1 + 0,4 = 1,4$. La hauteur de l'arbre un an après sa plantation est de 1,4 mètre.
(b) Deux années après sa plantation, la hauteur est $u_2 = u_1 + 0,4 = 1,4 + 0,4 = 1,8$. L'arbre mesurera 1,8 mètre.
- La hauteur augmente de 0,4 m d'une année sur l'autre, ce qui se traduit par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + 0,4$$

La suite (u_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 0,4$ et de premier terme $u_0 = 1$.

- D'après le cours sur le terme général d'une suite arithmétique, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + n \times r = 1 + 0,4n$$

- On cherche l'entier naturel n tel que la hauteur atteigne 9 mètres. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = 9 \Leftrightarrow 1 + 0,4n = 9 \Leftrightarrow 0,4n = 8 \Leftrightarrow n = \frac{8}{0,4} = 20$$

Le mûrier atteindra 9 mètres de haut au bout de 20 ans.

Partie B

- Chaque année, le nombre de nouvelles branches double. Pour tout entier naturel n , on a donc la relation :

$$v_{n+1} = 2 \times v_n$$

La suite (v_n) est par conséquent une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 2$.

- (a) Déterminons les nouvelles branches produites les années suivantes :
 - $v_1 = 4$ (donné par l'énoncé). Le total est $v_0 + v_1 = 2 + 4 = 6$.
 - $v_2 = v_1 \times 2 = 8$ (donné par l'énoncé). Le total est $6 + 8 = 14$.

- $v_3 = v_2 \times 2 = 16$.

Le nombre total de branches trois ans après la plantation est la somme des nouvelles branches ajoutées chaque année et des branches initiales : $v_0 + v_1 + v_2 + v_3 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$.

L'arbre possède bien un total de 30 branches trois ans après sa plantation.

- (b) Le programme Python simule l'évolution du nombre de branches année après année.

La variable `v` calcule le nombre de nouvelles branches de l'année en cours (en multipliant par 2 la valeur de l'année précédente).

La variable `total` agit comme un accumulateur qui somme toutes ces nouvelles branches.

La boucle `for i in range(10)` s'exécute 10 fois (de l'année 1 à l'année 10).

Dans le contexte de l'exercice, la valeur affichée 4094 représente donc le nombre total de branches de l'arbre 10 ans après sa plantation.

Exercice 2

1. (a) Calculons les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$:

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 5 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - (-1) \\ 0 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- (b) Le repère étant orthonormé, on utilise l'expression analytique du produit scalaire :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 5 + 0 \times (-5) = 20 + 0 = 20$$

2. (a) La distance AC correspond à la norme du vecteur $\vec{AC}$:

$$AC = \|\vec{AC}\| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$$

Or, $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$. La distance AC est bien égale à $5\sqrt{2}$.

- (b) On sait par ailleurs que le produit scalaire peut s'exprimer de manière géométrique à l'aide des longueurs et du cosinus de l'angle :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

- (c) En utilisant les résultats des questions précédentes, on a :

$$20 = 4 \times 5\sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$20 = 20\sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC})$$

On isole ensuite le cosinus de l'angle :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{20}{20\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

À l'aide de l'indication de l'énoncé ($\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$), on reconnaît une valeur remarquable du cosinus.

Une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est donc $\frac{\pi}{4}$ radians.

Exercice 3

1. (a) Par lecture graphique, le point d'abscisse 1 de la courbe $\mathcal{C}_f$ correspond au point A dont l'ordonnée est 20. On a donc $f(1) = 20$.

- (b) Le nombre dérivé $f'(1)$ représente géométriquement le coefficient directeur de la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

La droite T_A passe par les points $A(1; 20)$ et $B(3; 10)$. Calculons son coefficient directeur :

$$f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10 - 20}{3 - 1} = \frac{-10}{2} = -5$$

- (c) L'équation réduite d'une tangente en un point d'abscisse a est de la forme $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. En l'appliquant au point A d'abscisse 1 :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = -5(x - 1) + 20$$

En développant :

$$y = -5x + 5 + 20$$

On justifie bien que l'équation réduite de T_A est $y = -5x + 25$.

2. (a) La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x^2 + 7x + 9}{x}$. On peut la réécrire sous la forme d'une somme en séparant la fraction pour faciliter la dérivation :

$$f(x) = \frac{4x^2}{x} + \frac{7x}{x} + \frac{9}{x} = 4x + 7 + \frac{9}{x}$$

La fonction est dérivable sur cet intervalle. Sa fonction dérivée est :

$$f'(x) = 4 + 0 - \frac{9}{x^2} = \frac{4x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2} = \frac{4x^2 - 9}{x^2}$$

Au numérateur, on reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = 2x$ et $b = 3$. On obtient bien, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{x^2}$$

- (b) Étudions le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, on a $x^2 > 0$ et $2x + 3 > 0$.

Le signe de $f'(x)$ dépend donc exclusivement du signe du facteur $(2x - 3)$.

Soit $x > 0$. Alors,

$$2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2} = 1,5$$

Ainsi, on a :

- $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $]0; 1,5[$
- $f'(x) = 0$ pour $x = 1,5$
- $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $]1,5; +\infty[$

- (c) D'après le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation, on déduit que :

- La fonction f est strictement décroissante sur $]0; 1,5]$.

- La fonction f est strictement croissante sur $[1,5; +\infty[$.

L'image du minimum local se calcule par :

$$f(1,5) = \frac{4(1,5)^2 + 7(1,5) + 9}{1,5} = \frac{4 \times 2,25 + 10,5 + 9}{1,5} = \frac{9 + 10,5 + 9}{1,5} = \frac{28,5}{1,5} = 19$$

x	0	1,5	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	$+\infty$	19	$+\infty$

3. Une tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 5$ si et seulement si ces deux droites ont le même coefficient directeur.

Le coefficient directeur de la tangente en un point d'abscisse x correspond au nombre dérivé $f'(x)$. Le coefficient directeur de la droite donnée est 3.

On cherche donc à résoudre l'équation $f'(x) = 3$ sur $]0; +\infty[$:

$$\frac{4x^2 - 9}{x^2} = 3$$

Puisque $x \neq 0$, on multiplie les deux membres par x^2 :

$$4x^2 - 9 = 3x^2$$

En soustrayant $3x^2$ et en ajoutant 9 de chaque côté, on obtient :

$$x^2 = 9$$

Les solutions mathématiques de cette équation sont $x = 3$ et $x = -3$.

Or, on étudie la fonction sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On ne retient que la solution positive $x = 3$.

Il existe donc bien une unique tangente à $\mathcal{C}_f$ parallèle à la droite $y = 3x + 5$, et elle se situe au point d'abscisse 3.