

EAM 1ère générale tronc commun, Centres étrangers

Première partie : QCM

1. **Réponse b.** En respectant les priorités opératoires, la multiplication s'effectue en premier :

$$A = 4 - 2 \times \frac{1}{3} = 4 - \frac{2}{3} = \frac{12}{3} - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

2. **Réponse b.** De la même manière, on calcule d'abord la puissance puis le produit :

$$B = 2 \times 5^2 + 3 = 2 \times 25 + 3 = 50 + 3 = 53$$

3. **Réponse a.** Prendre 25 % d'une quantité revient à la multiplier par 0,25 (ou à la diviser par 4) :

$$250 \times 0,25 = 62,5$$

4. **Réponse b.** Une baisse de 15 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{15}{100} = 1 - 0,15 = 0,85$.
Le prix après la baisse s'obtient donc en effectuant le calcul : $300 \times 0,85$.

5. **Réponse d.** Par lecture graphique, la droite (AB) coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0;2), son ordonnée à l'origine est donc 2. Elle passe également par le point B(4;0). Son coefficient directeur se calcule ainsi : $\frac{0-2}{4-0} = \frac{-2}{4} = -0,5$. L'équation réduite est ainsi $y = -0,5x + 2$.

6. **Réponse d.** On remplace x par -1 dans l'expression :

$$2(-1)^2 - 3(-1) - 4 = 2 \times 1 + 3 - 4 = 2 + 3 - 4 = 1$$

7. **Réponse a.** En appliquant l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, on a :

$$(x - 4)^2 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$$

8. **Réponse c.** Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 3$ revient à déterminer les abscisses des points de la courbe situés au-dessus ou sur la droite d'équation $y = 3$. La courbe franchit cette droite pour $x = -5$ et repasse en dessous pour $x = -2$. L'ensemble des solutions est donc l'intervalle $[-5; -2]$.

9. **Réponse d.** L'équation $(2x + 4)(-3x - 9) = 0$ est une équation produit nul. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Soit $2x + 4 = 0$, ce qui donne $2x = -4$ et donc $x = -2$. Soit $-3x - 9 = 0$, ce qui donne $-3x = 9$ et donc $x = -3$. L'ensemble des solutions est $S = \{-3; -2\}$.

10. **Réponse b.** À partir de la formule $F = G \times \frac{m_1 \times m_2}{R^2}$, on multiplie par R^2 pour obtenir $F \times R^2 = G \times m_1 \times m_2$.
En divisant par $G \times m_2$, on isole bien $m_1 = \frac{F \times R^2}{G \times m_2}$.

11. **Réponse d.** La probabilité $P_A(\bar{B})$ correspond à la probabilité de l'événement $\bar{B}$ sachant que l'événement $\bar{A}$ est réalisé. Sur l'arbre, on se place au nœud $\bar{A}$ et on lit la probabilité sur la branche menant à $\bar{B}$, qui est 0,6.

12. **Réponse d.** La probabilité $P_A(\bar{B})$ correspond à la probabilité de la branche menant à $\bar{B}$ depuis le nœud A. La somme des probabilités issues du nœud A étant égale à 1, on a $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0,3 = 0,7$.

Deuxième partie

Exercice 1

1. On cherche la probabilité qu'un client soit satisfait, notée $P(S)$. Le tableau indique que le nombre total de clients interrogés est de 1000 et que le nombre total de clients satisfaits est de 900. Ainsi, $P(S) = \frac{900}{1000} = 0,9$.
2. L'événement $S \cap I$ correspond à « Le client est satisfait ET a acheté son billet par internet ». Dans le tableau, l'effectif correspondant à l'intersection de la ligne "Satisfait" et de la colonne "Billet acheté par internet" est de 720. Donc $P(S \cap I) = \frac{720}{1000} = 0,72$. Cela signifie que 72 % des clients interrogés ont acheté leur billet par internet et se déclarent satisfaits.

3. La probabilité $P_S(I)$ est la probabilité que le client ait acheté son billet par internet sachant qu'il est satisfait. En utilisant la définition des probabilités conditionnelles :

$$P_S(I) = \frac{P(S \cap I)}{P(S)} = \frac{0,72}{0,9} = 0,8$$

On pouvait également la lire directement dans le tableau en se restreignant à la ligne "Satisfait" : $\frac{720}{900} = 0,8$.

4. Pour savoir si les événements I et S sont indépendants, on compare $P(S \cap I)$ et le produit $P(S) \times P(I)$. Calculons tout d'abord la probabilité de l'événement I :

$$P(I) = \frac{800}{1000} = 0,8$$

On effectue le produit :

$$P(S) \times P(I) = 0,9 \times 0,8 = 0,72$$

On constate que $P(S \cap I) = P(S) \times P(I)$. Les événements I et S sont donc indépendants.

5. L'événement "Le client a acheté son billet en agence" correspond à l'événement contraire $\bar{I}$. L'affirmation du service marketing porte sur la proportion des clients satisfaits parmi ceux ayant acheté en agence, ce qui correspond à la probabilité conditionnelle $P_{\bar{I}}(S)$. En se restreignant à la colonne "Billet acheté en agence" (effectif total de 200), le nombre de satisfaits est de 180.

$$P_{\bar{I}}(S) = \frac{180}{200} = \frac{18}{20} = 0,9$$

Une probabilité de 0,9 équivaut bien à 90 %. L'affirmation du service marketing est donc exacte.

Exercice 2

1. Soit $x \in [0; 10]$. La fonction f est dérivable sur cet intervalle en tant que fonction polynôme. Sa dérivée f' est donnée par :

$$f'(x) = -3x^2 + 4,5 \times 2x - 6 = -3x^2 + 9x - 6$$

2. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 10]$, développons l'expression proposée :

$$(3x - 6)(1 - x) = 3x - 3x^2 - 6 + 6x = -3x^2 + 9x - 6$$

On retrouve bien l'expression de la fonction dérivée calculée à la question précédente. Ainsi, on a $f'(x) = (3x - 6)(1 - x)$.

3. Étudions le signe de $f'(x)$ en étudiant le signe de chacun des facteurs $(3x - 6)$ et $(1 - x)$.

- $3x - 6 = 0$ donne $3x = 6$, puis $x = 2$.

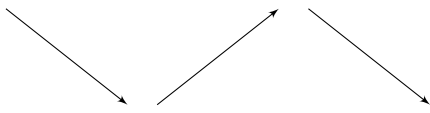
- $1 - x = 0$ donne $x = 1$.

On dresse le tableau de signes sur l'intervalle $[0; 10]$:

x	0	1	2	10	
$3x - 6$	−	0	−	+	
$1 - x$	+	0	−	−	
$f'(x)$	−	0	+	0	−

On en déduit que $f'(x) < 0$ sur les intervalles $[0; 1[$ et $]2; 10]$, et que $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $]1; 2[$.

4. Le signe de la fonction dérivée permet de déduire les variations de la fonction f . La fonction f est strictement décroissante sur $[0; 1]$, strictement croissante sur $[1; 2]$, et de nouveau strictement décroissante sur $[2; 10]$.

x	0	1	2	10	
$f'(x)$	−	0	+	0	−
Variations de f					

Exercice 3

1. En 2026, l'année correspond à $n = 1$. Le nombre d'adhérents est calculé par $B_1 = B_0 - 10 = 900 - 10 = 890$. Cela signifie qu'en 2026, le club de basketball comptera 890 adhérents.

2. Chaque année, le club perd une quantité constante d'adhérents (10). La suite (B_n) modélisant cette évolution est donc une suite arithmétique de premier terme $B_0 = 900$ et de raison $r = -10$. D'après le cours, le terme général s'écrit, pour tout entier naturel n :

$$B_n = B_0 + n \times r = 900 - 10n$$

3. L'année 2035 correspond au rang $n = 2035 - 2025 = 10$. Calculons le nombre d'adhérents en 2035 :

$$B_{10} = 900 - 10 \times 10 = 900 - 100 = 800$$

Calculons ce que représenterait une perte de 10 % des adhérents de 2025 :

$$10\% \text{ de } 900 = \frac{10}{100} \times 900 = 90$$

Si le club perdait exactement 10 % de ses effectifs, il lui resterait $900 - 90 = 810$ adhérents. Puisque 800 est strictement inférieur à 810, le club aura effectivement perdu plus de 10 % de ses adhérents entre 2025 et 2035.

4. L'année 2028 correspond à l'abscisse $x = 3$. Par lecture graphique, le point d'abscisse 3 a une ordonnée située approximativement au milieu entre la graduation 300 et 400. On peut donc estimer le nombre d'adhérents au club de handball en 2028 à environ 350.
5. La relation $H_{n+1} = 1,2 \times H_n$ valable pour tout entier naturel n caractérise une suite géométrique. La suite (H_n) est donc une suite géométrique de premier terme $H_0 = 200$ (adhérents en 2025) et de raison $q = 1,2$.
6. Pour savoir quand le nombre d'adhérents au club de handball dépassera celui du club de basketball, on cherche la plus petite valeur entière de n telle que $H_n > B_n$. L'expression explicite de H_n est $H_n = 200 \times 1,2^n$. Calculons les termes successifs des deux suites :
 - Pour $n = 5$ (année 2030) : $B_5 = 900 - 50 = 850$ et $H_5 = 200 \times 1,2^5 \approx 497,7$. On a $H_5 \leq B_5$.
 - Pour $n = 6$ (année 2031) : $B_6 = 900 - 60 = 840$ et $H_6 = 200 \times 1,2^6 \approx 597,2$. On a $H_6 \leq B_6$.
 - Pour $n = 7$ (année 2032) : $B_7 = 900 - 70 = 830$ et $H_7 = 200 \times 1,2^7 \approx 716,6$. On a $H_7 \leq B_7$.
 - Pour $n = 8$ (année 2033) : $B_8 = 900 - 80 = 820$ et $H_8 = 200 \times 1,2^8 \approx 859,9$.On constate que c'est pour $n = 8$ que la condition est vérifiée pour la première fois ($859,9 > 820$). Le nombre d'adhérents au club de handball deviendra donc supérieur à celui du club de basketball à partir de l'année $2025 + 8 = 2033$.