Asie, 9 juin 2026

Exercice 1

1. L'énoncé indique qu'au premier tir, le tireur atteint le centre avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. On a donc $p_1 = \frac{1}{2}$. L'évènement T_2 est réalisé soit si le tireur a atteint le centre au premier tir et l'atteint au second, soit s'il a raté le premier tir et atteint le centre au second. Les évènements T_1 et $\overline{T_1}$ forment une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$P(T_2) = P(T_1 \cap T_2) + P(\overline{T_1} \cap T_2)$$

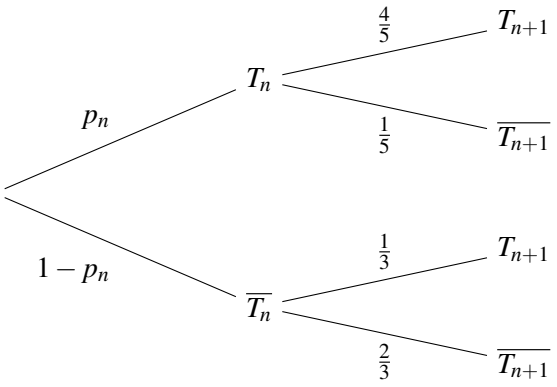
$$p_2 = P(T_1) \times P_{T_1}(T_2) + P(\overline{T_1}) \times P_{\overline{T_1}}(T_2)$$

En utilisant les données de l'énoncé :

$$p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3}$$

$$p_2 = \frac{4}{10} + \frac{1}{6} = \frac{12}{30} + \frac{5}{30} = \frac{17}{30}$$

2. Voici l'arbre de probabilité complété :



3. Soit n un entier naturel non nul. Les évènements T_n et $\overline{T_n}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T_{n+1}) = P(T_n \cap T_{n+1}) + P(\overline{T_n} \cap T_{n+1})$$

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{4}{5} + (1 - p_n) \times \frac{1}{3}$$

$$p_{n+1} = \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}p_n$$

En mettant les termes en p_n au même dénominateur (15) :

$$p_{n+1} = \left(\frac{12}{15} - \frac{5}{15}\right)p_n + \frac{1}{3} = \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}$$

4. (a) Soit n un entier naturel non nul. Exprimons u_{n+1} en fonction de u_n :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{5}{8}$$

En utilisant la relation établie à la question 3 :

$$u_{n+1} = \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3} - \frac{5}{8}$$

$$u_{n+1} = \frac{7}{15}p_n + \frac{8}{24} - \frac{15}{24} = \frac{7}{15}p_n - \frac{7}{24}$$

En factorisant par $\frac{7}{15}$:

$$u_{n+1} = \frac{7}{15}\left(p_n - \frac{7}{24} \times \frac{15}{7}\right) = \frac{7}{15}\left(p_n - \frac{15}{24}\right) = \frac{7}{15}\left(p_n - \frac{5}{8}\right)$$

On reconnait l'expression de u_n, ainsi pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = \frac{7}{15}u_n$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{7}{15}$. Son premier terme est $u_1 = p_1 - \frac{5}{8} = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = \frac{4}{8} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}$.

(b) D'après le cours sur les suites géométriques, on peut écrire pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}$$

(c) Comme $u_n = p_n - \frac{5}{8}$, on a $p_n = u_n + \frac{5}{8}$. Ainsi, pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}$$

5. Puisque $-1 < \frac{7}{15} < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} = 0$. Par produit et somme de limites, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{5}{8}$$

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'à long terme, s'il effectue un très grand nombre de tirs, la probabilité que le tireur atteigne le centre de la cible se stabilise autour de $\frac{5}{8}$ (soit 62,5 %).

6. Voici la fonction complétée en langage Python :

```
def seuil():
    n = 1
    p = 0.5
    while p < 0.6:
        n = n + 1
        p = (7/15) * p + 1/3
    return n
```

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$p_n \geq 0{,}6 \Leftrightarrow \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow -\frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geq \frac{3}{5} - \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geq \frac{24}{40} - \frac{25}{40} \Leftrightarrow -\frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geq -\frac{1}{40}$$

En multipliant par -8 (qui est négatif, le sens de l'inégalité change) :

$$p_n \geq 0{,}6 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \leq \frac{8}{40} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{5}$$

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, elle conserve donc l'ordre :

$$p_n \geq 0{,}6 \Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow (n-1)\ln\left(\frac{7}{15}\right) \leq -\ln(5)$$

Comme $0 < \frac{7}{15} < 1$, on a $\ln\left(\frac{7}{15}\right) < 0$. En divisant par ce nombre négatif, on change le sens de l'inégalité :

$$p_n \geq 0{,}6 \Leftrightarrow n - 1 \geq \frac{-\ln(5)}{\ln(7/15)}$$

À l'aide de la calculatrice, $\frac{-\ln(5)}{\ln(7/15)} \approx 2{,}11$. Puisque n est un entier naturel, on a $n-1 \geq 3$, ce qui donne $n \geq 4$. L'inéquation est donc vérifiée à partir de $n = 4$.

Exercice 2

1. **Affirmation 1 : VRAIE**
Pour tout réel $x \in]1;+\infty[$, on a $x > 0$ donc $\sqrt{x^2} = x$. On factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et sous la racine :

$$f(x) = \frac{x(1-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}} = \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Par somme, $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 1$. Par composition avec la racine carrée (continue en 1), $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1$. Par quotient, on obtient bien $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$.

2. **Affirmation 2 : VRAIE**
Démontrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$: « $w_n = (n+1)^2$ » pour tout entier naturel n.
Initialisation : Pour $n = 0$, $w_0 = 1$ d'après l'énoncé. La formule donne $(0+1)^2 = 1^2 = 1$. La propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie, soit $w_n = (n+1)^2$. Exprimons w_{n+1} :

$$w_{n+1} = w_n + 2n + 3$$

Par hypothèse de récurrence :

$$w_{n+1} = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4$$

On reconnait l'identité remarquable $(n+2)^2$, c'est-à-dire $((n+1)+1)^2$. La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, l'hérédité est établie. Le principe de récurrence permet de conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = (n+1)^2$.

3. **Affirmation 3 : VRAIE**
La variable X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ avec $n=3$. D'après la formule des probabilités pour une loi binomiale :
$$P(X=1)=\binom{3}{1}p^1(1-p)^{3-1}=3p(1-p)^2$$
En développant :
$$P(X=1)=3p(1-2p+p^2)=3p-6p^2+3p^3$$
L'affirmation est correcte.

4. **Affirmation 4 : FAUSSE**
Soit $n\geq 1$. Calculons l'intégrale v_n : Une primitive de la fonction $x\mapsto e^{nx}$ est la fonction $x\mapsto \frac{1}{n}e^{nx}$.
$$v_n=\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1=\frac{1}{n}e^{n\times 1}-\frac{1}{n}e^{n\times 0}=\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n}=\frac{e^n-1}{n}$$
L'expression proposée $\frac{e^n}{n}$ est donc fausse puisqu'il manque le terme $-\frac{1}{n}$.

5. **Affirmation 5 : FAUSSE**
Colorier chaque case revient à effectuer une succession de 16 choix indépendants. Pour chaque case, il y a 3 couleurs possibles. Le nombre total de coloriages est donc $3\times 3\times\cdots\times 3$ (16 facteurs), soit 3^{16}. Le nombre $\binom{16}{3}$ représente le nombre de façons de choisir 3 cases parmi les 16, ce qui ne correspond pas du tout à la situation décrite.

Exercice 3

1. (a) Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$:
$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3-1\\3-2\\1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2-1\\-2-2\\2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$$
Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont manifestement pas proportionnelles (par exemple, $2=2\times 1$ mais $1\neq 2\times(-4)$). Les vecteurs ne sont pas colinéaires, par conséquent les points B,C et E ne sont pas alignés. Ils définissent bien un plan (BCE).

(b) Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AF}$:
$$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}3-0\\0-0\\4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$$
Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$:
$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=3\times 2+0\times 1+3\times(-2)=6+0-6=0$$
Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}$:
$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=3\times 1+0\times(-4)+3\times(-1)=3+0-3=0$$
Le vecteur $\overrightarrow{AF}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (BCE). Il est donc bien un vecteur normal à ce plan.

(c) Puisque le vecteur $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (BCE), une équation cartésienne de ce plan est de la forme :

$$3x+0y+3z+d'=0 \text{ soit } 3x+3z+d'=0$$

Le plan passe par le point $C(3;3;1)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$3\times 3+3\times 1+d'=0 \iff 9+3+d'=0 \iff d'=-12$$

L'équation du plan est donc $3x+3z-12=0$. En divisant tous les termes par 3, on obtient bien l'équation équivalente :

$$x+z-4=0$$

2. (a) Remplaçons les coordonnées du point $G(5;1;2)$ dans l'équation du plan (BCE) :

$$x_G+z_G-4=5+2-4=3$$

Puisque $3\neq 0$, les coordonnées de G ne vérifient pas l'équation du plan. Le point G n'appartient pas au plan (BCE).

(b) Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur normal au plan (BCE) défini par les coefficients de l'équation cartésienne, $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont des vecteurs directeurs du plan (BCE). Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$:

$$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}5-0\\1-0\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$$

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{n}$:

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{n}=5\times 1+1\times 0+1\times 1=5+0+1=6$$

Ce produit scalaire étant non nul, le vecteur $\overrightarrow{AG}$ n'est pas orthogonal au vecteur normal du plan (BCE). Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AG}$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$. Ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

(c) D'après la question précédente, le vecteur directeur $\overrightarrow{AG}$ de la droite (AG) n'est pas coplanaire avec les vecteurs directeurs du plan (BCE). La droite (AG) n'est donc pas parallèle au plan (BCE). Ainsi, elle est sécante à ce plan.

3. (a) La droite (AG) passe par $A(0;0;1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de cette droite s'écrit :

$$\begin{cases}x=0+5t\\y=0+1t\\z=1+1t\end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases}x=5t\\y=t\\z=1+t\end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

(b) Le point $P(x_P,y_P,z_P)$ est l'intersection de la droite (AG) et du plan (BCE). Ses coordonnées vérifient donc le système paramétrique de la droite et l'équation du plan.

Soit t le réel tel que $\begin{cases} x_P = 5t \\ y_P = t \\ z_P = 1+t \end{cases}$

On a alors $x_P + z_P - 4 = 0$ soit $(5t)+(1+t)-4=0$. Ainsi, $6t-3=0$ et donc $t=\frac{1}{2}$.
En injectant cette valeur de paramètre dans la représentation paramétrique, on obtient les coordonnées de P :

$$x_P = 5\times\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}; \quad y_P = \frac{1}{2}; \quad z_P = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Le point P a pour coordonnées $P\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

(c) Soit I le milieu du segment $[EC]$. Ses coordonnées se calculent par :

$$x_I = \frac{x_E+x_C}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y_I = \frac{y_E+y_C}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$z_I = \frac{z_E+z_C}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

On constate que les coordonnées de I sont identiques à celles du point P. Ainsi, P est bien le milieu du segment $[EC]$.

4. Les plans (BCE) et (ACG) sont sécants car le point G n'appartient pas au plan (BCE), ils ne sont donc ni confondus ni parallèles (ils partagent le point C). Leur intersection est une droite. On remarque que le point C appartient de manière évidente aux deux plans. De plus, le point P appartient au plan (BCE) (vu en 3.b) et appartient également au plan (ACG) puisqu'il est situé sur la droite (AG). Les points C et P étant distincts et appartenant aux deux plans, l'intersection des plans (BCE) et (ACG) est la droite (CP).

Exercice 4

1. (a) La fonction g est définie sur $[0;2\pi]$ par $g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$. En utilisant la formule de dérivation d'un produit $(uv)' = u'v+uv'$, on dérive le terme $x\cos(x)$. Pour tout $x\in[0;2\pi]$,

$$g'(x) = (1\times\cos(x) + x\times(-\sin(x))) - \cos(x)$$

$$g'(x) = \cos(x) - x\sin(x) - \cos(x) = -x\sin(x)$$

Le résultat attendu est bien démontré.

(b) Pour justifier les éléments du tableau de variations, étudions le signe de $g'(x) = -x\sin(x)$ sur $[0;2\pi]$. Pour tout $x\in[0;2\pi]$, le facteur x est positif. Le signe de $g'(x)$ dépend donc du signe de $-\sin(x)$.

- Sur $]0;\pi[$, $\sin(x)>0$, donc $-x\sin(x)<0$. La dérivée g' est strictement négative, la fonction g est strictement décroissante sur $[0;\pi]$.

- Sur $]\pi;2\pi[$, $\sin(x)<0$, donc $-x\sin(x)>0$. La dérivée g' est strictement positive, la fonction g est strictement croissante sur $[\pi;2\pi]$.

Calculons les images aux bornes pour justifier les valeurs du tableau :

- $g(0) = 0\times\cos(0) - \sin(0) = 0$

- $g(\pi) = \pi\cos(\pi) - \sin(\pi) = \pi \times (-1) - 0 = -\pi$
- $g(2\pi) = 2\pi\cos(2\pi) - \sin(2\pi) = 2\pi \times 1 - 0 = 2\pi$

(c) Sur l'intervalle $[\pi;2\pi]$, la fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante. De plus, $g(\pi) = -\pi$ et $g(2\pi) = 2\pi$. Le nombre 0 est compris entre $-\pi$ et 2π (soit $g(\pi) < 0 < g(2\pi)$). D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[\pi;2\pi]$.

(d) Grâce à la racine α et aux variations de la fonction, on peut déduire le tableau de signes de $g(x)$. Sur $[0;\pi]$, g est décroissante de 0 à $-\pi$, donc $g(x)$ est négative. Sur $[\pi;\alpha[$, g est croissante de $-\pi$ à 0, donc $g(x)$ est strictement négative. Pour $x = \alpha$, $g(\alpha) = 0$. Sur $]\alpha;2\pi]$, g est croissante de 0 à 2π, donc $g(x)$ est strictement positive. On résume cela :

x	0		α		2π
Signe de $g(x)$	0	$-$	0	$+$	

2. (a) La fonction f est définie sur $]0;2\pi]$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. On utilise la formule de dérivation d'un quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$. Pour tout réel $x \in]0;2\pi]$:

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \times x - \sin(x) \times 1}{x^2} = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

Le numérateur correspond exactement à l'expression de la fonction $g(x)$. Ainsi :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

(b) Pour tout $x \in]0;2\pi]$, le dénominateur x^2 est strictement positif. Le signe de la dérivée $f'(x)$ est donc identique au signe du numérateur $g(x)$. D'après le tableau de signes de la question 1.d :

- Sur $]0;\alpha[$, $f'(x) < 0$.
- Pour $x = \alpha$, $f'(\alpha) = 0$.
- Sur $]\alpha;2\pi]$, $f'(x) > 0$.

(c) D'après le signe de sa dérivée, on en déduit les variations de la fonction f : La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;\alpha]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha;2\pi]$.

(d) La limite de f en 0 correspond à la limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ quand $x \to 0$. L'énoncé suggère d'utiliser le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0. Soit $u(x) = \sin(x)$. La fonction u est dérivable en 0 et $u'(x) = \cos(x)$, donc $u'(0) = \cos(0) = 1$. Le taux d'accroissement s'écrit :

$$\lim_{x\to 0} \frac{u(x) - u(0)}{x - 0} = u'(0)$$

Ce qui donne :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x} = 1$$

Puisque $\sin(0) = 0$, on retrouve l'expression de la fonction $f(x)$, ainsi :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

3. Soient deux nombres réels r et s tels que $0 < r < s < \pi$. D'après la question 1.c, la racine α est située dans l'intervalle $[\pi; 2\pi]$. Par conséquent, $\pi \leq \alpha$. L'intervalle $]0; \pi]$ est donc entièrement inclus dans l'intervalle $]0; \alpha]$, sur lequel la fonction f est strictement décroissante (question 2.c). Puisque la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle et que $r < s$, elle inverse l'ordre des images :

$$f(r) > f(s)$$

Ce qui s'écrit :

$$\frac{\sin(r)}{r} > \frac{\sin(s)}{s}$$

Comme r et s appartiennent à l'intervalle $]0; \pi[$, les quantités $\sin(s)$ et r sont des nombres strictement positifs. On peut multiplier l'inégalité par $\frac{r}{\sin(s)}$ sans en changer le sens :

$$\frac{\sin(r)}{r} \times \frac{r}{\sin(s)} > \frac{\sin(s)}{s} \times \frac{r}{\sin(s)}$$

$$\frac{\sin(r)}{\sin(s)} > \frac{r}{s}$$

Ce qui s'écrit bien dans l'autre sens :

$$\frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}$$