

Asie, 10 juin 2026

Exercice 1

Partie A

1. La fonction f est une fonction rationnelle définie sur l'intervalle $I =]-\infty; \frac{3}{2}[$. Elle est dérivable sur cet intervalle.

En utilisant la formule de dérivation d'un quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = x - 2$ et $v(x) = 2x - 3$, on a, pour tout $x < \frac{3}{2}$:

$$f'(x) = \frac{1(2x-3) - 2(x-2)}{(2x-3)^2} = \frac{2x-3-2x+4}{(2x-3)^2} = \frac{1}{(2x-3)^2}$$

Pour tout réel $x \in I$, $(2x-3)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty; \frac{3}{2}[$.

Étude des limites :

- En $-\infty$: On factorise par le terme de plus haut degré. Pour tout $x < \frac{3}{2}$:

$$f(x) = \frac{x(1 - 2/x)}{x(2 - 3/x)} = \frac{1 - 2/x}{2 - 3/x}$$

. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, par quotient on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

- En $\frac{3}{2}^-$: $\lim_{x \rightarrow 3/2^-} (x-2) = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 3/2^-} (2x-3) = 0^-$.

Par quotient, un négatif divisé par 0^- donne $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 3/2^-} f(x) = +\infty$.

Ces éléments justifient parfaitement le tableau de variations fourni.

2. Soit $x \in [0; 1]$. Puisque f est strictement croissante sur $]-\infty; 3/2[$ (qui contient l'intervalle $[0; 1]$), elle conserve l'ordre.

Ainsi, $0 \leq x \leq 1$ donc $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$.

Calculons les images aux bornes : $f(0) = \frac{0-2}{0-3} = \frac{2}{3}$ et $f(1) = \frac{1-2}{2-1} = \frac{-1}{1} = -1$. On a donc $\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 1$.

Puisque $0 \leq \frac{2}{3}$, on en déduit que $0 \leq f(x) \leq 1$, ce qui prouve que $f(x) \in [0; 1]$.

Partie B

1. Démontrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ pour tout entier naturel n .

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$. $u_1 = \frac{u_0-2}{2u_0-3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$.

On a bien $0 \leq 0 \leq \frac{2}{3} \leq 1$, soit $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$. La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

La fonction f de la partie A est strictement croissante sur $[0; 1]$. On peut donc appliquer la fonction f aux membres de l'inégalité sans en changer le sens :

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$$

Ce qui donne :

$$\frac{2}{3} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$$

Puisque $0 \leq \frac{2}{3}$, on obtient bien $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$. La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

2. D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante ($u_n \leq u_{n+1}$) et majorée par 1 ($u_n \leq 1$). Par le théorème de la convergence monotone, on en déduit que la suite (u_n) converge vers une limite réelle ℓ .
3. La fonction f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$. La suite (u_n) converge vers $\ell \in [0; 1]$ et vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$. La limite ℓ est donc solution de l'équation $f(\ell) = \ell$. Résolvons cette équation sur $[0; 1]$:

$$\frac{l-2}{2l-3} = l \iff l-2 = l(2l-3) \iff l-2 = 2l^2-3l$$

$$2l^2-4l+2=0 \iff 2(l^2-2l+1)=0 \iff 2(l-1)^2=0$$

L'unique solution est $l = 1$. La suite (u_n) converge donc vers 1.

4. Le programme Python calcule les termes de la suite (u_n) jusqu'à ce que la distance entre u_n et la limite 1 soit strictement inférieure à h (soit $u_n \geq 1-h$). L'appel `seuil(0.0001)` renvoie 5000. Cela signifie que le 5000^e terme est le premier à dépasser la valeur $1-0,0001 = 0,9999$. Interprétation : Il faut attendre le rang $n = 5000$ pour que les termes de la suite (u_n) soient distants de sa limite 1 de moins de 10^{-4} .

5. (a) Calculons les quatre premiers termes :

- $u_0 = 0$

- $u_1 = \frac{2}{3}$

- $u_2 = \frac{2/3-2}{2(2/3)-3} = \frac{-4/3}{4/3-9/3} = \frac{-4/3}{-5/3} = \frac{4}{5}$

- $u_3 = \frac{4/5-2}{2(4/5)-3} = \frac{4/5-10/5}{8/5-15/5} = \frac{-6/5}{-7/5} = \frac{6}{7}$

- (b) On observe la suite des numérateurs (0, 2, 4, 6) qui correspondent à $2n$, et la suite des dénominateurs (1, 3, 5, 7) qui correspondent à $2n+1$. On émet la conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n}{2n+1}$. Démontrons-le par récurrence :

- *Initialisation* : Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $\frac{2(0)}{2(0)+1} = 0$. Vrai.

- *Hérédité* : Supposons que $u_n = \frac{2n}{2n+1}$ pour un certain rang n .

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{\frac{2n}{2n+1} - 2}{2\left(\frac{2n}{2n+1}\right) - 3} = \frac{\frac{2n-2(2n+1)}{2n+1}}{\frac{4n-3(2n+1)}{2n+1}}$$

$$u_{n+1} = \frac{2n-4n-2}{4n-6n-3} = \frac{-2n-2}{-2n-3} = \frac{2n+2}{2n+3} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1}$$

L'hérédité est prouvée.

- *Conclusion* : Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{2n}{2n+1}$.

Exercice 2

Partie A

1. L'expérience consiste à répéter $n = 16$ fois, de manière identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli (le lancer-franc) n'admettant que deux issues : le succès (réussite du lancer) de probabilité $p = 0,492$ et l'échec. La variable aléatoire X compte le nombre de succès. Elle suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 16$ et $p = 0,492$, notée $\mathcal{B}(16; 0,492)$.
2. L'espérance d'une loi binomiale est donnée par $E(X) = n \times p = 16 \times 0,492 = 7,872$. Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'en moyenne, s'il joue un grand nombre de matchs dans ces conditions, le joueur réussira environ 7,87 lancers-francs par match.
3. $P(X = 5) = \binom{16}{5} \times 0,492^5 \times (1 - 0,492)^{16-5} = 4368 \times 0,492^5 \times 0,508^{11} \approx 0,073$ (à 10^{-3} près).
4. On cherche $P(X \geq 6)$. En utilisant la calculatrice, on a : $P(X \geq 6) \approx 0,883$.

Partie B

1. La variable aléatoire Y compte le nombre de réussites sur 3 lancers-francs. Les valeurs possibles sont donc $\{0; 1; 2; 3\}$.
2. Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3, p)$. $P(Y = 2) = \binom{3}{2} p^2 (1 - p)^1 = 3p^2(1 - p)$.
3. Le tableau de la loi de probabilité de Y est le suivant :

k	0	1	2	3
$P(Y = k)$	$(1 - p)^3$	$3p(1 - p)^2$	$3p^2(1 - p)$	p^3

4. On a $P(Y \geq 2) = P(Y = 2) + P(Y = 3) = 3p^2(1 - p) + p^3 = 3p^2 - 3p^3 + p^3 = -2p^3 + 3p^2$.
5. (a) La fonction f est dérivable sur $[0; 1]$. Pour tout $x \in [0; 1]$:

$$f'(x) = -2 \times 3x^2 + 3 \times 2x = -6x^2 + 6x = 6x(1 - x)$$

Sur $[0; 1]$, $x \geq 0$ et $1 - x \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$ (et $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = 1$). La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; 1]$. $f(0) = 0$ et $f(1) = -2 \times 1^3 + 3 \times 1^2 = 1$.

x	0	1
$f'(x)$	0	0
f	0	1

- (b) La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$. De plus, on a $f(0) < 0,9 < f(1)$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,9$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 1]$.

(c) À l'aide de la calculatrice, on dresse un tableau de valeurs :

$$f(0,80) = -2 \times 0,80^3 + 3 \times 0,80^2 = 0,896$$

$$f(0,81) = -2 \times 0,81^3 + 3 \times 0,81^2 \approx 0,905$$

On a donc l'encadrement : $0,80 < \alpha < 0,81$.

(d) Dans le contexte, α représente la probabilité de réussite d'un lancer-franc qu'un joueur doit atteindre pour avoir une probabilité de 90 % (soit 0,9) de réussir au moins 2 lancers-francs sur 3.

Exercice 3

1. (a) Calculons les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$: $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1-1 \\ 3-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées ne sont pas proportionnelles (par exemple $-2/1 \neq 1/-1$). Les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés, ils définissent un plan (ABC) .

(b) Calculons les produits scalaires :

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 \times (-2) + 4 \times 1 + 1 \times (-2) = -2 + 4 - 2 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 1 \times 1 + 4 \times (-1) + 1 \times 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

Le vecteur $\vec{n}(1; 4; 1)$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC) , il est donc normal à ce plan.

(c) Une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $1x + 4y + 1z + d = 0$.

Le point $A(1; 2; 3)$ appartient au plan, donc :

$$1 \times 1 + 4 \times 2 + 1 \times 3 + d = 0 \text{ donc } 1 + 8 + 3 + d = 0 \text{ donc } d = -12$$

Une équation cartésienne de (ABC) est $x + 4y + z - 12 = 0$.

2. (a) La droite (d) est perpendiculaire à (ABC) , le vecteur $\vec{n}(1; 4; 1)$ est donc un vecteur directeur de (d) .
La droite passe par $D(3; -2; -1)$.
Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = -1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(b) Le point H est le point d'intersection de (d) et de (ABC) . On injecte les équations paramétriques dans l'équation cartésienne :

$$(3+t) + 4(-2+4t) + (-1+t) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3+t-8+16t-1+t-12=0 \Leftrightarrow 18t-18=0 \Leftrightarrow 18t=18 \Leftrightarrow t=1$$

En remplaçant $t = 1$ dans la représentation paramétrique, on obtient $H(4; 2; 0)$.

(c) La distance du point D au plan (ABC) est la distance DH :

$$DH = \sqrt{(x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2 + (z_H - z_D)^2}$$

$$DH = \sqrt{(4 - 3)^2 + (2 - (-2))^2 + (0 - (-1))^2} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18}$$

On sait que $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$. La distance est bien $3\sqrt{2}$.

3. (a) On calcule d'abord le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-2) \times 3 = -2 - 1 - 6 = -9$.
Calculons ensuite les longueurs AB et AC :

$$AB = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3,$$

$$AC = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}.$$

Or, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, donc :

$$-9 = 3\sqrt{11} \times \cos(\widehat{BAC}) \text{ donc } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{-9}{3\sqrt{11}} = \frac{-3}{\sqrt{11}} = -\frac{3\sqrt{11}}{11}.$$

(b) On utilise l'identité trigonométrique $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$:

$$\sin^2(\widehat{BAC}) = 1 - \cos^2(\widehat{BAC}) = 1 - \left(-\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2 = 1 - \frac{9}{11} = \frac{2}{11}.$$

Puisque la mesure d'un angle géométrique dans un triangle est comprise entre 0 et π , son sinus est positif.

$$\sin(\widehat{BAC}) = \sqrt{\frac{2}{11}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{22}}{11}.$$

(c) L'aire du triangle ABC (notée $\mathcal{B}$) est donnée par $\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin(\widehat{BAC})$:

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{11} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

4. Le volume du tétraèdre $ABCD$ est $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où la hauteur h est la distance DH trouvée précédemment.

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{9 \times 2}{6} = \frac{18}{6} = 3 \text{ unités de volume.}$$

Exercice 4

1. Affirmation 1 : FAUSSE

Pour étudier la convexité, on calcule la dérivée seconde. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x ,

$$f'(x) = 5 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^4 = -\frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^4.$$

$$f''(x) = -\frac{5}{2} \times 4 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^3 = 5 \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^3.$$

Le signe de $f''(x)$ dépend de $(-\frac{1}{2}x + 3)$.

$$-\frac{1}{2}x + 3 > 0 \iff -\frac{1}{2}x > -3 \iff x < 6.$$

La fonction f est convexe sur $] -\infty; 6]$ mais concave sur $[6; +\infty[$. Elle n'est donc pas convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Affirmation 2 : VRAIE

Le nombre total de tirages (combinaisons de 5 jetons parmi 32) est $\binom{32}{5} = 201\,376$.

Parmi les nombres de 1 à 32, les multiples de 8 sont : $\{8, 16, 24, 32\}$, soit 4 jetons. Il reste donc 28 jetons qui ne sont pas des multiples de 8.

Le nombre de tirages ne contenant AUCUN multiple de 8 correspond au choix de 5 jetons parmi ces 28 restants : $\binom{28}{5} = 98\,280$.

En utilisant l'événement contraire, le nombre de tirages contenant au moins un multiple de 8 est : $201\,376 - 98\,280 = 103\,096$.

3. Affirmation 3 : FAUSSE

L'affirmation porte sur la probabilité conditionnelle $P_B(\bar{A})$, qui se calcule par la formule :

$$P_B(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$$

D'après l'arbre de probabilités, la somme des probabilités issues d'un même nœud vaut 1. On en déduit :

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

- $P_{\bar{A}}(B) = 1 - P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$

On calcule la probabilité de l'intersection $\bar{A} \cap B$:

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{50}$$

(On remarque que l'énoncé a utilisé la valeur de cette intersection pour formuler sa proposition).

Pour calculer le dénominateur $P(B)$, on utilise la formule des probabilités totales. Les événements A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers, donc :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + \frac{9}{50}$$

$$P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{9}{50} = \frac{2}{20} + \frac{9}{50} = \frac{1}{10} + \frac{9}{50} = \frac{5}{50} + \frac{9}{50} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

On peut maintenant évaluer la probabilité conditionnelle demandée :

$$P_B(\bar{A}) = \frac{\frac{9}{50}}{\frac{14}{50}} = \frac{9}{50} \times \frac{50}{14} = \frac{9}{14}$$

Puisque $\frac{9}{14} \neq \frac{9}{50}$, l'affirmation est bien fausse.

4. Affirmation 4 : VRAIE

Soit $h : x \mapsto e^{-x} \sin(x)$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. Pour tout réel x ,

$$h'(x) = -e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x).$$

Injectons h dans le membre de gauche de l'équation (E) :

$$h'(x) + h(x) = (-e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x)) + e^{-x} \sin(x) = e^{-x} \cos(x).$$

On retrouve bien le second membre, h est donc solution de (E) .

5. Affirmation 5 : FAUSSE

La solution générale d'une équation différentielle de la forme $y' + y = f(x)$ s'écrit $y = y_0 + h$, où y_0 est la solution générale de l'équation homogène associée $y' + y = 0$, et h une solution particulière.

Les solutions de $y' + y = 0$ sont les fonctions $y_0 : x \mapsto Ce^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

D'après l'affirmation 4, $h : x \mapsto e^{-x} \sin(x)$ est une solution particulière.

L'ensemble des solutions de (E) est donc composé des fonctions $y : x \mapsto Ce^{-x} + e^{-x} \sin(x) = e^{-x}(C + \sin(x))$, avec $C \in \mathbb{R}$.

L'affirmation omet l'addition et propose un produit, elle est donc fausse.