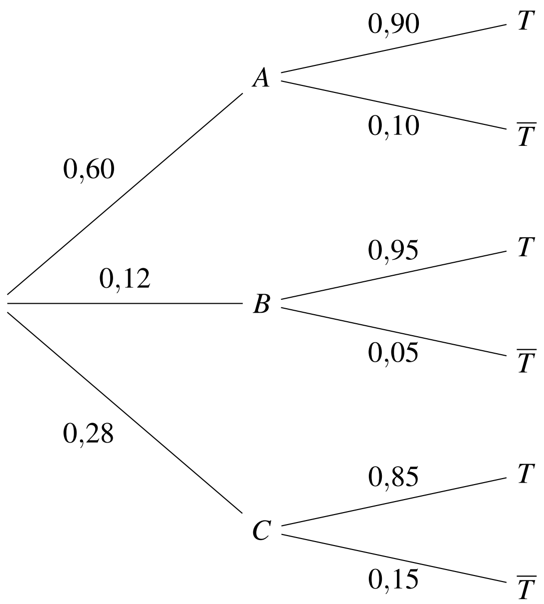
Centres étrangers, 10 juin 2026

EXERCICE 1

Partie A

1. Les données de l'énoncé nous permettent de compléter l'arbre avec les probabilités correspondantes. Le stock est composé à 60 % de lames A, 12 % de lames B. La proportion de lames C est donc de $100 - 60 - 12 = 28\,\%$.



2. On cherche à calculer la probabilité de l'intersection $A \cap \overline{T}$:

$$P(A \cap \overline{T}) = P(A) \times P_A(\overline{T}) = 0{,}60 \times 0{,}10 = 0{,}06$$

Interprétation : La probabilité qu'une lame choisie au hasard provienne du fournisseur A et ne soit pas conforme est de 0,06 (soit 6 %).

3. Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T) \\ &= P(A) \times P_A(T) + P(B) \times P_B(T) + P(C) \times P_C(T) \\ &= 0{,}60 \times 0{,}90 + 0{,}12 \times 0{,}95 + 0{,}28 \times 0{,}85 \\ &= 0{,}54 + 0{,}114 + 0{,}238 \\ &= 0{,}892 \end{aligned}$$

La probabilité que la lame soit conforme est bien de 0,892.

4. On cherche à calculer la probabilité conditionnelle $P_{\overline{T}}(B)$. On calcule d'abord la probabilité de l'évènement contraire de T : $P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0{,}892 = 0{,}108$.

$$P_{\overline{T}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{0{,}12 \times 0{,}05}{0{,}108} = \frac{0{,}006}{0{,}108} \approx 0{,}056$$

Partie B

1. Le choix de l'échantillon étant assimilé à un tirage avec remise, on répète $n = 75$ fois de manière identique et indépendante une épreuve n'admettant que deux issues : le "succès" (la lame est non conforme) de probabilité $p = 0{,}108$, et l'échec. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, elle suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(75\,;0{,}108)$.

2. D'après la formule de la loi binomiale :

$$P(X = 6) = \binom{75}{6} \times 0{,}108^6 \times (1 - 0{,}108)^{75-6}$$

À l'aide de la calculatrice, on trouve $P(X = 6) \approx 0{,}120$.

3. On cherche la probabilité qu'il y ait strictement plus de 8 lames non conformes, c'est-à-dire $P(X > 8)$. Puisque X est à valeurs entières, on a

$$\begin{aligned} P(X > 8) &= P(X \geq 9) \\ &\approx 0{,}422 \end{aligned}$$

Puisque $0{,}422 < 0{,}50$, la probabilité est bien inférieure à 50 %. L'équipementier a raison.

Partie C

1. Par linéarité de l'espérance, et sachant que chaque X_i suit la même loi de probabilité de moyenne $E(X_1) = 75 \times 0{,}108 = 8{,}1$:

$$E(M_n) = E\left(\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)\right) = \frac{1}{n} \times n \times E(X_1) = 8{,}1$$

Les variables X_i étant indépendantes, la variance de leur somme est la somme de leurs variances, avec $V(X_1) = 75 \times 0{,}108 \times (1 - 0{,}108) = 7{,}2252$:

$$V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)\right) = \frac{1}{n^2} \times n \times V(X_1) = \frac{V(X_1)}{n} = \frac{7{,}2252}{n}$$

2. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev stipule que pour une variable aléatoire M_n d'espérance μ et de variance V, et pour tout réel $a > 0$:

$$P(|M_n - \mu| \geq a) \leq \frac{V(M_n)}{a^2}$$

En appliquant cette inégalité avec $\mu = 8{,}1$ et $a = 2$, on obtient pour tout entier naturel n non nul :

$$P(|M_n - 8{,}1| \geq 2) \leq \frac{\frac{7{,}2252}{n}}{2^2} = \frac{7{,}2252}{4n} = \frac{1{,}8063}{n}$$

3. L'événement $(|M_n - 8{,}1| < 2)$ est l'événement contraire de $(|M_n - 8{,}1| \geq 2)$. On cherche un entier naturel n tel que :

$$1 - P(|M_n - 8{,}1| \geq 2) \geq 0{,}95 \iff P(|M_n - 8{,}1| \geq 2) \leq 0{,}05$$

D'après la question précédente, il suffit que le majorant vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{1{,}8063}{n} \leq 0{,}05 &\iff n \geq \frac{1{,}8063}{0{,}05} \\ &\iff n \geq 36{,}126 \end{aligned}$$

La plus petite valeur entière de n vérifiant cette condition est $n = 37$.
Interprétation : À partir de 37 compétitions, la probabilité que la moyenne des lames non conformes par compétition s'écarte de son espérance théorique (8,1) de strictement moins de 2 lames est supérieure ou égale à 95 %.

EXERCICE 2

1. **AFFIRMATION 1 : VRAIE**
Pour tout réel x, la fonction f est dérivable et sa dérivée est :

$$f' : x \mapsto -4e^{-x} - \sin(x) + \cos(x)$$

Injectons la fonction f dans le membre de gauche de l'équation (E). Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) + f(x) &= (-4e^{-x} - \sin(x) + \cos(x)) + (4e^{-x} + \cos(x) + \sin(x)) \\ &= 2\cos(x) \end{aligned}$$

L'égalité étant vérifiée pour tout réel x, la fonction f est bien solution de (E).

2. **AFFIRMATION 2 : VRAIE**
Soit la fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = 2x - \sin(x)$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $h'(x) = 2 - \cos(x)$.
Sachant que pour tout réel x, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, on a $h'(x) \geq 1 > 0$.
La fonction h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Or, $h(0) = 0$. Ainsi, pour tout $x < 0$, on a $h(x) < 0$ et pour tout $x > 0$, on a $h(x) > 0$. L'unique solution de l'équation $h(x) = 0$ est donc $x = 0$: l'unique point d'intersection des deux courbes est l'origine du repère.

3. **AFFIRMATION 3 : FAUSSE**
Pour tout entier naturel n, on a l'encadrement classique $-1 \leq \sin(n) \leq 1$.

On en déduit que pour tout entier naturel n, en ajoutant $2n$ puis en divisant par $n+1$ (qui est strictement positif) :

$$\frac{2n-1}{n+1} \leq \frac{2n+\sin(n)}{n+1} \leq \frac{2n+1}{n+1}$$

Pour déterminer la limite des deux suites encadrantes en $+\infty$, on factorise le numérateur et le dénominateur par n (pour $n \neq 0$) :

$$\frac{2n-1}{n+1} = \frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

$$\frac{2n+1}{n+1} = \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Par somme et quotient de limites, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{1} = 2$$

Les deux suites encadrantes convergent donc vers 2. D'après le théorème des gendarmes, la suite (v_n) converge vers 2. Elle ne diverge donc pas.

4. **AFFIRMATION 4 : VRAIE**

Avant de conclure, calculons les premiers termes de la suite à l'aide de la relation de récurrence pour tester l'affirmation :

- $u_1 = 1$, ce qui correspond bien à 1^2.
- $u_2 = u_1 + 2\times 1 + 1 = 1+2+1 = 4$, ce qui correspond bien à 2^2.
- $u_3 = u_2 + 2\times 2 + 1 = 4+4+1 = 9$, ce qui correspond bien à 3^2.

Ces premiers résultats corroborent la formule proposée. Démontrons maintenant par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $u_n = n^2$.

Initialisation : Pour $n = 1$, l'énoncé donne $u_1 = 1$ et on a bien $1^2 = 1$. La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Soit un entier naturel $n \geq 1$ tel que $u_n = n^2$. Exprimons le terme suivant à l'aide de la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2n + 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$, l'hérédité est prouvée.

Par le principe de récurrence, on conclut que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a bien $u_n = n^2$.

5. **AFFIRMATION 5 : VRAIE**

La suite (u_n) peut s'écrire $u_n = (e^{-1})^n = \left(\frac{1}{e}\right)^n$. C'est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{e}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

La somme S_n de ses $n+1$ premiers termes est donnée par :

$$S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}}$$

Puisque $-1 < \frac{1}{e} < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = 0$. Ainsi, par opérations sur les limites :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} S_n &= \frac{1}{1-\frac{1}{e}}\\ &= \frac{1}{\frac{e-1}{e}}\\ &= \frac{e}{e-1}\end{aligned}$$

EXERCICE 3

1. D'après le choix du repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, on déduit les coordonnées des sommets utiles du cube : $A(0;0;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $H(0;1;1)$.

2. Les points I,J,K étant des milieux, on a :
   - I milieu de $[EF]$: $x_I = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, $y_I = \frac{0+0}{2} = 0$, $z_I = \frac{1+1}{2} = 1$. Donc $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$.
   - J milieu de $[EH]$: $x_J = \frac{0+0}{2} = 0$, $y_J = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, $z_J = \frac{1+1}{2} = 1$. Donc $J\left(0;\frac{1}{2};1\right)$.
   - K milieu de $[AE]$: $x_K = \frac{0+0}{2} = 0$, $y_K = \frac{0+0}{2} = 0$, $z_K = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$. Donc $K\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$.

3. (a) Calculons les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}0\\1/2\\1\end{pmatrix}$. Leur produit scalaire dans un repère orthonormé est :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ} &= \frac{1}{2}\times 0 + 0\times\frac{1}{2} + 1\times 1\\ &= 1\end{aligned}$$

   (b) Calculons les normes des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$:

$$\begin{aligned}AI &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}\\ AJ &= \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

   Par définition géométrique du produit scalaire, on sait que :

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ} = AI\times AJ\times\cos(\widehat{IAJ})$$

   En remplaçant par les valeurs trouvées précédemment, on obtient :

$$1 = \frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\cos(\widehat{IAJ})$$

   Ce qui donne :

$$1 = \frac{5}{4}\times\cos(\widehat{IAJ})$$

On en déduit donc la valeur du cosinus :

$$\cos(\widehat{IAJ}) = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

À l'aide de la calculatrice, on trouve une mesure de l'angle arrondie au dixième de degré :

$$\widehat{IAJ} \approx 36{,}9^\circ$$

4. (a) Le point C a pour coordonnées $(1;1;0)$ dans ce repère. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KC}$ sont $\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$. Vérifions l'orthogonalité de ce vecteur avec deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (AIJ) :

$$\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{AI} = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$
$$\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{AJ} = 1 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{KC}$ est bien un vecteur normal au plan (AIJ).

(b) Une équation cartésienne du plan (AIJ) est de la forme $1x + 1y - \frac{1}{2}z + d = 0$.
Puisque le plan passe par l'origine $A(0;0;0)$, on a $d = 0$.
On retrouve bien l'équation $x + y - \dfrac{1}{2}z = 0$.

5. (a) La droite (CL) est orthogonale au plan (AIJ) puisqu'elle est définie par un projeté orthogonal. Elle admet donc pour vecteur directeur un vecteur normal au plan, c'est-à-dire le vecteur $\overrightarrow{KC}$.
La droite (CL) passant par le point $C(1;1;0)$, une de ses représentations paramétriques s'écrit :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Le point L appartient à la droite (CL).
Il existe donc un réel t tel que ses coordonnées soient $\left(1+t; 1+t; -\frac{1}{2}t\right)$.
De plus, le point L appartient au plan (AIJ), dont une équation cartésienne est $x + y - \frac{1}{2}z = 0$. En injectant les coordonnées de L exprimées en fonction du paramètre t dans cette équation, on obtient :

$$(1+t) + (1+t) - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}t\right) = 0$$

En regroupant les termes, on a :

$$2 + 2t + \frac{1}{4}t = 0$$

Ce qui donne :

$$\frac{9}{4}t = -2$$

On en déduit la valeur du paramètre t correspondant au point L :

$$t = -2 \times \frac{4}{9} = -\frac{8}{9}$$

Enfin, en remplaçant le paramètre t par cette valeur dans la représentation paramétrique, on calcule les coordonnées exactes du point L :

$$x_L = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$
$$y_L = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$
$$z_L = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{8}{9}\right) = \frac{4}{9}$$

Le point L a donc pour coordonnées $L\left(\frac{1}{9};\frac{1}{9};\frac{4}{9}\right)$.

(b) La distance du point C au plan (AIJ) correspond à la longueur du segment $[CL]$:

$$\begin{aligned} CL &= \sqrt{\left(\frac{1}{9}-1\right)^2+\left(\frac{1}{9}-1\right)^2+\left(\frac{4}{9}-0\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{8}{9}\right)^2+\left(-\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{64}{81}+\frac{64}{81}+\frac{16}{81}} \\ &= \sqrt{\frac{144}{81}} \\ &= \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

6. (a) Le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-1/2\\ m-0\\ 1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\ m\\ 0\end{pmatrix}$. La droite (IM) passe par $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ et est dirigée par $\overrightarrow{IM}$. Une représentation paramétrique est donc :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}s \\ y = 0+ms \\ z = 1+0s \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}s+\frac{1}{2} \\ y = ms \\ z = 1 \end{cases} \quad , \quad s \in \mathbb{R}$$

(b) Deux droites de l'espace sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou sécantes. Étudions ces deux cas pour les droites (IM) et (KC).
Vérifions d'abord si elles peuvent être parallèles. Un vecteur directeur de la droite (KC) est le vecteur $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1/2\end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1/2\\ m\\ 0\end{pmatrix}$. Pour toute valeur du réel m, la troisième coordonnée du vecteur $\overrightarrow{IM}$ est nulle, tandis que celle du vecteur $\overrightarrow{KC}$ est non nulle $(-1/2)$. Par conséquent, ces deux vecteurs ne peuvent pas être colinéaires. Les droites (IM) et (KC) ne sont donc parallèles pour aucune valeur de m.

Cherchons maintenant si elles peuvent être sécantes. La droite (KC) passe par le point $K(0;0;1/2)$ et est dirigée par $\overrightarrow{KC}$. Une de ses représentations paramétriques est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Un point appartient à l'intersection des droites (IM) et (KC) si et seulement s'il existe deux réels s et t vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} = t \\ ms = t \\ 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \end{cases}$$

La troisième équation donne directement :

$$\frac{1}{2}t = -\frac{1}{2}$$

Ce qui implique que $t = -1$.
En remplaçant le paramètre t par -1 dans la première équation, on obtient :

$$\frac{1}{2}s + \frac{1}{2} = -1$$

Ce qui donne $\frac{1}{2}s = -\frac{3}{2}$, et l'on en déduit que $s = -3$.
Enfin, en remplaçant les réels s et t par leurs valeurs respectives dans la deuxième équation, on trouve la condition sur m :

$$m \times (-3) = -1$$

On en déduit donc que $m = \frac{1}{3}$.
Le système n'admet de couple solution $(s;t)$ que si le réel m est égal à $\frac{1}{3}$. Les droites (IM) et (KC) ne sont donc sécantes que pour cette valeur précise.
Pour toute autre valeur de m (par exemple $m = 0$), les droites (IM) et (KC) ne sont ni sécantes, ni parallèles. Elles ne sont donc pas coplanaires. L'affirmation proposée est par conséquent fausse.

EXERCICE 4

Partie A

1. (a) Pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, on a $f(x) = \ln(x) \times \frac{1}{x^2}$.
   $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.
   En $+\infty$, d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ pour tout réel $n > 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   (b) L'axe des ordonnées (droite d'équation $x = 0$) est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$. L'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$) est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.

2. Pour tout réel strictement positif x, on a, en utilisant la dérivée d'un quotient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} \end{aligned}$$

En simplifiant le numérateur et le dénominateur par le facteur commun x (puisque $x \neq 0$) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x(1-2\ln(x))}{x^4} \\ &= \frac{1-2\ln(x)}{x^3} \end{aligned}$$

3. Pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, on a $x^3 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est identique à celui du numérateur $1-2\ln(x)$.
   Résolvons l'inéquation associée :

$$\begin{aligned} 1-2\ln(x) \geq 0 &\iff 1 \geq 2\ln(x) \\ &\iff \frac{1}{2} \geq \ln(x) \\ &\iff e^{1/2} \geq x \end{aligned}$$

   Soit $x \leq \sqrt{e}$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0;\sqrt{e}]$ et strictement décroissante sur $[\sqrt{e};+\infty[$. Le maximum est atteint en $x = \sqrt{e}$ et vaut $f(\sqrt{e}) = \frac{\ln(e^{1/2})}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1/2}{e} = \frac{1}{2e}$.

4. L'équation réduite de la tangente Δ en $x = 1$ est de la forme $y = f'(1)(x-1)+f(1)$.
   On a $f(1) = \frac{\ln(1)}{1^2} = 0$ et $f'(1) = \frac{1-2\ln(1)}{1^3} = 1$.
   L'équation est donc $y = 1(x-1)+0$, soit $y = x-1$.

5. Pour tout réel strictement positif x, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left(-2\times\frac{1}{x}\right)\times x^3-(1-2\ln(x))\times 3x^2}{(x^3)^2} \\ &= \frac{-2x^2-3x^2+6x^2\ln(x)}{x^6} \end{aligned}$$

   En factorisant par x^2 :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^2(-5+6\ln(x))}{x^6} \\ &= \frac{-5+6\ln(x)}{x^4} \end{aligned}$$

6. (a) Le signe de $f''(x)$ dépend uniquement du numérateur car $x^4 > 0$.

$$\begin{aligned} -5+6\ln(x) \geq 0 &\iff 6\ln(x) \geq 5 \\ &\iff \ln(x) \geq \frac{5}{6} \\ &\iff x \geq e^{\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

   On en déduit que $f''(x) \leq 0$ sur $]0;e^{\frac{5}{6}}]$ (la fonction f y est donc concave) et que $f''(x) \geq 0$ sur $[e^{\frac{5}{6}};+\infty[$ (la fonction f y est convexe). La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour $x = e^{\frac{5}{6}}$. Il y a donc un unique point d'inflexion, dont l'ordonnée est $f(e^{\frac{5}{6}}) = \frac{5/6}{(e^{5/6})^2} = \frac{5}{6e^{5/3}}$.

(b) Sur $]0;e^{\frac{5}{6}}]$, la fonction f est concave. La courbe $\mathscr{C}_f$ est donc située entièrement en dessous de chacune de ses tangentes sur cet intervalle.
Or, la valeur 1 appartient bien à cet intervalle (car $\frac{5}{6} > 0$, donc $e^{\frac{5}{6}} > 1$).
La tangente en $x = 1$ ayant pour équation $y = x - 1$, on a $f(x) \leq x - 1$ pour tout réel x de cet intervalle. L'inégalité est démontrée.

7. Pour tout réel $x \in [e^{\frac{5}{6}};+\infty[$, on a $x \geq e^{\frac{5}{6}}$.
Puisque $e > 2$, $e^{\frac{5}{6}} > 2^{\frac{5}{6}} \approx 1{,}78 > 1$. Donc $x - 1 > 0{,}78$. Par ailleurs, d'après la question 3, le maximum global de la fonction f sur tout son ensemble de définition est $\frac{1}{2e} \approx 0{,}18$. Ainsi, on a l'enchaînement : $f(x) \leq \frac{1}{2e} < x - 1$. On a donc bien $x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$ sur l'intervalle $[e^{\frac{5}{6}};+\infty[$.

Partie B

1. L'intégrale I_n correspond à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équations $x = 1$ et $x = n$.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on calcule la différence $I_{n+1} - I_n$ à l'aide de la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_1^{n+1} f(x)\,dx - \int_1^n f(x)\,dx \\ &= \int_n^{n+1} f(x)\,dx \end{aligned}$$

Pour tout réel $x \in [n;n+1]$, on a $x \geq 1$ donc $\ln(x) \geq 0$, ce qui implique $f(x) \geq 0$. L'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle où les bornes sont dans le sens croissant ($n < n+1$) est positive. On a donc $I_{n+1} - I_n \geq 0$. La suite (I_n) est croissante.

3. Le script parcourt les abscisses de 2 à 9 (inclus grâce à `range(2, 10)`) et ajoute successivement les aires des rectangles construits sur les intervalles de longueur 1, soit de la forme $1 \times f(i)$. Voici le script complété :

```python
from math import log, exp
S = 1 / (2 * exp(1))
for i in range(2, 10):
    S = S + log(i) / (i**2)
print(S)
```

4. Pour calculer l'intégrale I_n, procédons à une intégration par parties.
Posons, pour tout réel $x \in [1;n]$:
   - $u(x) = \ln(x)$, ce qui donne $u'(x) = \frac{1}{x}$
   - $v'(x) = \frac{1}{x^2}$, dont on choisit la primitive $v(x) = -\frac{1}{x}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[1;n]$ et leurs dérivées sont continues. Elles sont donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle. Les conditions étant vérifiées, la formule d'intégration par parties nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_1^n u(x) \times v'(x)\,dx \\
&= [u(x) \times v(x)]_1^n - \int_1^n u'(x) \times v(x)\,dx \\
&= \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^n - \int_1^n \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x}\right) dx \\
&= \left(-\frac{\ln(n)}{n}\right) - \left(-\frac{\ln(1)}{1}\right) + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx
\end{aligned}$$

Puisque $\ln(1) = 0$, le deuxième terme s'annule. En intégrant de nouveau la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_n &= -\frac{\ln(n)}{n} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n \\
&= -\frac{\ln(n)}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) \\
&= -\frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{n} + 1
\end{aligned}$$

En mettant tous ces termes au même dénominateur n, on retrouve bien l'expression attendue :

$$I_n = \frac{-\ln(n) - 1 + n}{n} = \frac{n - 1 - \ln(n)}{n}$$

5. Pour étudier la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$, il est plus judicieux de reprendre l'expression développée obtenue lors du calcul de la question précédente :

$$I_n = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n}$$

D'une part, on a la limite usuelle :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

D'autre part, d'après les théorèmes de croissances comparées à l'infini, on sait que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$

Par conséquent, en appliquant les propriétés sur la somme des limites, on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 1 - 0 - 0 = 1$$

La suite (I_n) converge donc vers la valeur 1.