

Centres étrangers, 11 juin 2026

EXERCICE 1 (4 points)

1. Calculons les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} à partir des coordonnées des points donnés dans l'énoncé :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On remarque immédiatement que leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles (par exemple, la première coordonnée de \overrightarrow{AC} est nulle alors que celle de \overrightarrow{AB} ne l'est pas). Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont donc pas colinéaires. Par conséquent, les points A , B et C ne sont pas alignés : ils définissent un plan de l'espace, noté (ABC) .

2. Calculons le produit scalaire du vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ avec les vecteurs directeurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} :

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} &= 4 \times 1 + 4 \times 1 + 2 \times (-4) \\ &= 4 + 4 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} &= 4 \times 0 + 4 \times 1 + 2 \times (-2) \\ &= 0 + 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le vecteur \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC) . Il s'agit donc bien d'un vecteur normal à ce plan.

3. Puisque $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) , une équation cartésienne de ce plan s'écrit sous la forme :

$$4x + 4y + 2z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Le point $A(1;0;3)$ appartenant au plan (ABC) , ses coordonnées vérifient cette équation :

$$\begin{aligned} 4 \times 1 + 4 \times 0 + 2 \times 3 + d &= 0 \quad \text{donc } 4 + 6 + d = 0 \\ \text{donc } d &= -10 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $4x + 4y + 2z - 10 = 0$. En simplifiant par 2, on obtient une équation équivalente plus simple :

$$2x + 2y + z - 5 = 0$$

4. Vérifions si les coordonnées du point $H(0; 2; 1)$ vérifient l'équation du plan (ABC) :

$$\begin{aligned} 2x_H + 2y_H + z_H - 5 &= 2 \times 0 + 2 \times 2 + 1 - 5 \\ &= 0 + 4 + 1 - 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée, le point H appartient donc au plan (ABC) .

5. Pour déterminer la mesure de l'angle géométrique \widehat{BAH} , calculons d'abord le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

à l'aide des coordonnées. On a $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-0 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} &= 1 \times (-1) + 1 \times 2 + (-4) \times (-2) \\ &= -1 + 2 + 8 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Calculons ensuite les normes des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AH} :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\ AH &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

D'après l'expression trigonométrique du produit scalaire, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH \times \cos(\widehat{BAH})$$

En remplaçant par les valeurs numériques, on obtient :

$$9 = 3\sqrt{2} \times 3 \times \cos(\widehat{BAH})$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} 9 &= 9\sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAH}) \text{ donc } \cos(\widehat{BAH}) = \frac{9}{9\sqrt{2}} \\ \text{donc } \cos(\widehat{BAH}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que la mesure exacte de l'angle \widehat{BAH} est de 45° .

6. La droite (d) est orthogonale au plan (ABC) , elle admet donc comme vecteur directeur tout vecteur normal au plan, par exemple le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (colinéaire à \vec{n}). Puisqu'elle passe par le point $H(0; 2; 1)$, une représentation paramétrique de (d) est :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

7. Le point H appartient au plan (ABC) (d'après la question 4) et la droite (d) est orthogonale au plan (ABC) en passant par H (d'après la question 6).

Par conséquent, pour tout point S appartenant à la droite (d) , son projeté orthogonal sur le plan (ABC) est précisément le point H . La distance du point S au plan (ABC) correspond donc à la longueur du segment $[SH]$.

Le point S appartient à la droite (d) , il existe donc un réel t tel que $S(2t; 2 + 2t; 1 + t)$. Calculons la distance SH en fonction de t à l'aide des coordonnées du point $H(0; 2; 1)$:

$$\begin{aligned} SH &= \sqrt{(x_S - x_H)^2 + (y_S - y_H)^2 + (z_S - z_H)^2} \\ &= \sqrt{(2t - 0)^2 + (2 + 2t - 2)^2 + (1 + t - 1)^2} \\ &= \sqrt{(2t)^2 + (2t)^2 + t^2} \\ &= \sqrt{4t^2 + 4t^2 + t^2} \\ &= \sqrt{9t^2} \\ &= 3|t| \end{aligned}$$

L'énoncé impose que cette distance soit égale à 6. On a donc :

$$3|t| = 6$$

Ce qui donne $|t| = 2$. Il y a par conséquent deux solutions possibles pour le paramètre : $t = 2$ ou $t = -2$. L'énoncé précise également que l'abscisse du point S , notée x_S , doit être positive. Or, d'après la représentation paramétrique, on a $x_S = 2t$. Si $t = -2$, alors $x_S = -4$, ce qui est strictement négatif et ne convient pas. Il faut donc retenir l'unique valeur $t = 2$.

En remplaçant le paramètre t par 2 dans la représentation paramétrique de la droite (d) , on obtient les coordonnées exactes du point S :

$$x_S = 2 \times 2 = 4$$

$$y_S = 2 + 2 \times 2 = 6$$

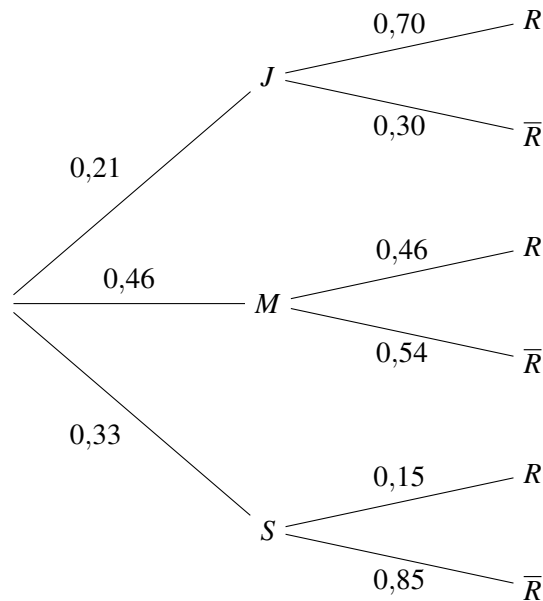
$$z_S = 1 + 2 = 3$$

Le point S a donc pour coordonnées $S(4; 6; 3)$.

EXERCICE 2 (4 points)

Partie A

- D'après l'énoncé, la population se répartit ainsi : 21 % pour J , 46 % pour M , et 33 % pour S . On a également les probabilités conditionnelles de R selon les âges. On complète l'arbre de la manière suivante :



2. Calculons la probabilité de l'intersection :

$$\begin{aligned}
 P(M \cap R) &= P(M) \times P_M(R) \\
 &= 0,46 \times 0,46 \\
 &= 0,2116
 \end{aligned}$$

Interprétation : La probabilité que la personne interrogée ait entre 30 et 59 ans et qu'elle ait déjà publié sur ce réseau social est d'environ 0,212 (soit 21,2%).

3. (a) Les événements J , M et S forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
 P(R) &= P(J \cap R) + P(M \cap R) + P(S \cap R) \\
 &= P(J) \times P_J(R) + P(M) \times P_M(R) + P(S) \times P_S(R) \\
 &= 0,21 \times 0,70 + 0,2116 + 0,33 \times 0,15 \\
 &= 0,147 + 0,2116 + 0,0495 \\
 &= 0,4081
 \end{aligned}$$

La probabilité que la personne ait déjà publié sur ce réseau social est donc d'environ 0,408 (arrondie au millième).

(b) On cherche à calculer la probabilité conditionnelle $P_R(S)$. Par définition :

$$\begin{aligned}
 P_R(S) &= \frac{P(S \cap R)}{P(R)} \\
 &= \frac{0,0495}{0,4081} \\
 &\approx 0,121
 \end{aligned}$$

Sachant qu'elle a déjà publié, la probabilité que la personne ait au moins 60 ans est d'environ 0,121.

Partie B

1. L'expérience consistant à interroger une personne est une épreuve de Bernoulli dont le succès est "la personne a déjà publié", de probabilité $p = 0,41$. Le choix des sondés étant assimilé à un tirage avec remise, on répète cette épreuve $n = 100$ fois de manière identique et indépendante. La variable aléatoire X compte le nombre de succès. Elle suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,41$, notée $\mathcal{B}(100; 0,41)$.
2. On cherche à calculer $P(X \geq 50)$. En utilisant la calculatrice, on a $P(X \geq 50) \approx 0,043$.
3. L'espérance mathématique pour une loi binomiale est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} E(X) &= n \times p \\ &= 100 \times 0,41 \\ &= 41 \end{aligned}$$

Interprétation : Sur un échantillon de 100 personnes interrogées, on peut s'attendre, en moyenne, à ce que 41 d'entre elles aient déjà publié sur ce réseau social.

Partie C

Pour chaque entier i de 1 à 150, la variable aléatoire X_i suit la même loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,41)$. On a donc pour chaque ville :

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 41 \\ V(X_i) &= n \times p \times (1 - p) = 100 \times 0,41 \times 0,59 = 24,19 \end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance, l'espérance de la variable aléatoire moyenne Y est :

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{150}}{150}\right) \\ &= \frac{1}{150} \times 150 \times E(X_1) \\ &= 41 \end{aligned}$$

Les échantillons étant prélevés de manière indépendante, les variables aléatoires X_i sont indépendantes. La variance de Y est donc :

$$\begin{aligned} V(Y) &= V\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{150}}{150}\right) \\ &= \frac{1}{150^2} \times 150 \times V(X_1) \\ &= \frac{24,19}{150} \end{aligned}$$

On cherche à démontrer que $P(37 < Y < 45) > 0,98$. Remarquons que cet encadrement est centré autour de l'espérance $\mu = 41$:

$$37 < Y < 45 \iff -4 < Y - 41 < 4 \iff |Y - 41| < 4$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable Y , pour tout réel $a > 0$:

$$P(|Y - \mu| \geq a) \leq \frac{V(Y)}{a^2}$$

En choisissant $a = 4$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(|Y - 41| \geq 4) &\leq \frac{\frac{24,19}{150}}{4^2} \\ &\leq \frac{24,19}{150 \times 16} \\ &\leq \frac{24,19}{2400} \end{aligned}$$

On calcule $\frac{24,19}{2400} \approx 0,01008$. En passant par l'évènement contraire, on en déduit que :

$$\begin{aligned} P(|Y - 41| < 4) &= 1 - P(|Y - 41| \geq 4) \\ &\geq 1 - \frac{24,19}{2400} \\ &\geq 0,9899 \end{aligned}$$

Puisque $0,9899 > 0,98$, on a bien démontré que la probabilité que la variable aléatoire Y soit strictement comprise entre 37 et 45 est strictement supérieure à 98 %.

EXERCICE 3 (6 points)

Partie A

1. Pour tout réel $x \in [2; +\infty[$, on a $f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = 3x^2 + 2x$.

La dérivée s'écrit $f' : x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$. Pour tout $x \geq 2$:

$$f'(x) = \frac{6x + 2}{3x^2 + 2x}$$

Pour tout réel $x \geq 2$, on a de façon évidente $x > 0$, d'où l'on déduit que $6x + 2 > 0$ et $3x^2 + 2x > 0$. Le quotient de deux quantités strictement positives étant strictement positif, on a $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

2. (a) La fonction g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$ (données de l'énoncé). Calculons l'image de 2 :

$$g(2) = f(2) - 2 = \ln(3 \times 2^2 + 2 \times 2) - 2 = \ln(16) - 2 \approx 0,77$$

L'énoncé donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$. Puisque $0 \in]-\infty; g(2)[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

(b) À l'aide de la calculatrice, par balayage, on obtient :

$$\begin{aligned} g(4,04) &\approx 0,003 > 0 \\ g(4,05) &\approx -0,0017 < 0 \end{aligned}$$

On a donc $4,04 < \alpha < 4,05$.

(c) Puisque la fonction g est strictement décroissante et s'annule en α , on en déduit son tableau de signes :

- Pour tout $x \in [2; \alpha[$, $g(x) > 0$.
- Pour $x = \alpha$, $g(x) = 0$.
- Pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) < 0$.

x	2	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

Partie B

1. Démontrons cette propriété par récurrence.

- *Initialisation* : L'énoncé précise que l'on se place dans le cas où $2 \leq a_0 \leq \alpha$. La propriété est donc vraie au rang 0.
- *Hérédité* : Soit un entier naturel n tel que $2 \leq a_n \leq \alpha$.

La fonction f étant strictement croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$ (d'après la Partie A), elle conserve l'ordre. On peut l'appliquer à l'encadrement :

$$f(2) \leq f(a_n) \leq f(\alpha)$$

Or, on sait que $f(a_n) = a_{n+1}$. De plus, $f(2) = \ln(16) \approx 2,77$, donc $2 \leq f(2)$. Enfin, puisque α est solution de $g(x) = 0$, on a $f(\alpha) - \alpha = 0$, ce qui implique que $f(\alpha) = \alpha$. On en déduit donc l'enchaînement :

$$2 \leq f(2) \leq a_{n+1} \leq \alpha$$

L'hérédité est prouvée.

- Par le principe de récurrence, on conclut que pour tout entier naturel n , on a $2 \leq a_n \leq \alpha$.

2. Étudions le signe de la différence entre deux termes consécutifs. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= f(a_n) - a_n \\ &= g(a_n) \end{aligned}$$

Or, d'après la question 1, $a_n \leq \alpha$. D'après le tableau de signes de la fonction g établi dans la Partie A, pour tout $x \leq \alpha$, on a $g(x) \geq 0$. Ainsi, $g(a_n) \geq 0$, ce qui signifie que $a_{n+1} - a_n \geq 0$. La suite (a_n) est donc croissante.

3. La suite (a_n) est croissante et, d'après la question 1, elle est majorée par le réel α . D'après le théorème de la convergence monotone, on en déduit que la suite (a_n) converge vers une limite réelle L .

4. La fonction f est continue sur $[2; +\infty[$. Puisque la suite (a_n) converge vers L et vérifie la relation de récurrence $a_{n+1} = f(a_n)$, la limite L doit obligatoirement être solution de l'équation $f(L) = L$.

$$\begin{aligned} f(L) = L &\iff f(L) - L = 0 \\ &\iff g(L) = 0 \end{aligned}$$

D'après la Partie A, l'équation $g(x) = 0$ admet pour unique solution le réel α sur l'intervalle d'étude. On en déduit ainsi que la limite de la suite (a_n) est α .

Partie C

1. Démontrons cette inégalité par récurrence.

- *Initialisation* : Pour $n = 0$, on a $a_0 = 2$ et $b_0 = 10$. On a bien $2 \leq 10$, donc $a_0 \leq b_0$. La propriété est vraie au rang 0.
- *Hérédité* : Soit un entier naturel n tel que $a_n \leq b_n$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$, on a :

$$f(a_n) \leq f(b_n)$$

Ce qui donne directement, d'après la définition des suites :

$$a_{n+1} \leq b_{n+1}$$

L'hérédité est prouvée.

- Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , on a $a_n \leq b_n$.

2. (a) Le script calcule simultanément les termes des suites (a_n) et (b_n) jusqu'à ce que la distance entre les deux termes soit inférieure ou égale à 10^{-p} . Pour `algo(2)`, la boucle s'arrête dès que $b_n - a_n \leq 10^{-2}$ (soit 0,01). En calculant les termes successifs (par exemple à la calculatrice), on constate que cette condition est satisfaite pour $n = 9$, avec $a_9 \approx 4,043$ et $b_9 \approx 4,048$ (leur différence est de 0,005). L'instruction renvoie donc le couple : $(9, 4.043)$.

(b) *Interprétation* : La valeur renvoyée indique qu'il faut calculer jusqu'au rang $n = 9$ pour que l'écart entre les termes des suites (b_n) et (a_n) devienne inférieur à 0,01. Puisque ces deux suites convergent vers la même limite α en l'encadrant ($a_n \leq \alpha \leq b_n$), la valeur 4,043 constitue une approximation de la racine α par défaut, précise à moins de 10^{-2} près.

EXERCICE 4 (6 points)

Partie A

Partie A

Partie A

On observe graphiquement que la courbe \mathcal{C}_2 (en trait plein) est située au-dessus de l'axe des abscisses (la fonction qu'elle décrit est donc positive) sur l'intervalle $] -\infty; 2]$, puis se situe en dessous (fonction négative) sur l'intervalle $[2; 5]$.

Parallèlement, on constate que la courbe \mathcal{C}_3 (en tirets) est strictement croissante jusqu'à l'abscisse 2, puis strictement décroissante sur l'intervalle $[2; 5]$.

Puisque le signe de la fonction décrite par \mathcal{C}_2 correspond parfaitement aux variations de la fonction décrite par \mathcal{C}_3 , on en déduit que \mathcal{C}_2 représente la fonction dérivée de celle décrite par \mathcal{C}_3 .

En appliquant ce même raisonnement à l'étape supérieure, on observe que la courbe \mathcal{C}_3 est située en dessous de l'axe des abscisses (fonction négative) jusqu'à une abscisse d'environ 1,4, puis au-dessus (fonction positive) entre 1,4 et environ 3,6.

Parallèlement, on constate que la courbe \mathcal{C}_1 (en pointillés) est strictement décroissante jusqu'à l'abscisse 1,4, puis strictement croissante sur l'intervalle $[1,4; 3,6]$.

Puisque le signe de la fonction décrite par \mathcal{C}_3 donne exactement les variations de la fonction décrite par \mathcal{C}_1 , on en déduit que \mathcal{C}_3 représente la fonction dérivée de celle décrite par \mathcal{C}_1 .

Par enchaînements successifs des dérivations, l'association rigoureuse est donc la suivante :

- La fonction f est représentée par la courbe \mathcal{C}_1 .
- La fonction dérivée f' est représentée par la courbe \mathcal{C}_3 .
- La fonction dérivée seconde f'' est représentée par la courbe \mathcal{C}_2 .

Partie B

1. Pour tout réel x , la fonction $g(x) = (x^2 - 3x)e^{-x}$ est dérivable en tant que produit de fonctions dérivables. Calculons sa dérivée de la forme $(uv)' = u'v + uv'$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2x - 3)e^{-x} + (x^2 - 3x)(-e^{-x}) \\ &= (2x - 3)e^{-x} - (x^2 - 3x)e^{-x} \end{aligned}$$

Vérifions maintenant si g est solution de l'équation (E) en calculant $g'(x) + g(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) + g(x) &= ((2x - 3)e^{-x} - (x^2 - 3x)e^{-x}) + (x^2 - 3x)e^{-x} \\ &= (2x - 3)e^{-x} \end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée pour tout réel x . La fonction g est donc bien une solution particulière de l'équation différentielle (E) .

2. L'équation différentielle homogène associée est $y' + y = 0$.
D'après le cours, l'ensemble des solutions de cette équation est constitué des fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$y_0(x) = Ce^{-x} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

3. Les solutions générales de l'équation complète (E) s'obtiennent en ajoutant la solution particulière g à la solution générale de l'équation homogène. L'ensemble des solutions de (E) est donc composé des fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{-x} + (x^2 - 3x)e^{-x} \\ &= (x^2 - 3x + C)e^{-x} \quad \text{où } C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4. On cherche l'unique solution f vérifiant la condition initiale $f(0) = 2$.

$$\begin{aligned} f(0) = 2 &\iff (0^2 - 3 \times 0 + C)e^{-0} = 2 \\ &\iff C \times 1 = 2 \\ &\iff C = 2 \end{aligned}$$

La solution f est donc définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$.

Partie C

1. La fonction f est définie par le produit d'un polynôme du second degré et de l'exponentielle.
Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$. Le signe de $f(x)$ ne dépend donc que de celui du polynôme $x^2 - 3x + 2$.
Cherchons ses racines avec le discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$. Le polynôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Le polynôme est du signe du coefficient dominant $a = 1 > 0$ à l'extérieur des racines. On en déduit le signe de f :

- Pour tout $x \in]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$, $f(x) \geq 0$.
- Pour tout $x \in [1; 2]$, $f(x) \leq 0$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
Signe de $f(x)$	+	0	-	0	+

2. (a) En $-\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$. Par produit des limites, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

- (b) En $+\infty$, développons l'expression de la fonction :

$$f(x) = x^2 e^{-x} - 3x e^{-x} + 2e^{-x}$$

D'après les théorèmes de croissances comparées, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Par somme de ces limites, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

3. (a) Calculons l'intégrale I à l'aide d'une première intégration par parties. Pour tout $x \in [0; 1]$, posons :

- $u(x) = x^2 - 3x + 2$, d'où $u'(x) = 2x - 3$
- $v'(x) = e^{-x}$, dont on choisit la primitive $v(x) = -e^{-x}$

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[0; 1]$.

$$\begin{aligned} I &= [(x^2 - 3x + 2)(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 (2x - 3)(-e^{-x}) dx \\ &= (0 - 2(-1)) + \int_0^1 (2x - 3)e^{-x} dx \\ &= 2 + \int_0^1 (2x - 3)e^{-x} dx \end{aligned}$$

Appliquons une seconde intégration par parties à la nouvelle intégrale. Posons :

- $u(x) = 2x - 3$, d'où $u'(x) = 2$
- $v'(x) = e^{-x}$, d'où $v(x) = -e^{-x}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x - 3)e^{-x} dx &= [(2x - 3)(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 2(-e^{-x}) dx \\ &= (-(-e^{-1}) - (-3)(-1)) + \int_0^1 2e^{-x} dx \\ &= (e^{-1} - 3) + [-2e^{-x}]_0^1 \\ &= e^{-1} - 3 + (-2e^{-1} - (-2)) \\ &= -e^{-1} - 1 \end{aligned}$$

En réinjectant ce résultat dans le calcul de I , on obtient :

$$\begin{aligned} I &= 2 + (-e^{-1} - 1) \\ &= 1 - e^{-1} \\ &= 1 - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

- (b) *Interprétation graphique* : D'après l'étude de signe (question C.1), la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; 1]$. L'intégrale I représente donc l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie D

1. L'équation de la tangente (T_a) au point d'abscisse a est donnée par la formule :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Calculons d'abord la dérivée de f pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 3)e^{-x} + (x^2 - 3x + 2)(-e^{-x}) \\ &= (2x - 3 - x^2 + 3x - 2)e^{-x} \\ &= (-x^2 + 5x - 5)e^{-x} \end{aligned}$$

L'équation de la tangente est donc :

$$y = (-a^2 + 5a - 5)e^{-a}(x - a) + (a^2 - 3a + 2)e^{-a}$$

Le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des ordonnées a pour abscisse $x = 0$. En remplaçant x par 0 dans l'équation, on détermine son ordonnée :

$$\begin{aligned} y &= (-a^2 + 5a - 5)e^{-a}(-a) + (a^2 - 3a + 2)e^{-a} \\ &= (a^3 - 5a^2 + 5a)e^{-a} + (a^2 - 3a + 2)e^{-a} \\ &= (a^3 - 5a^2 + 5a + a^2 - 3a + 2)e^{-a} \\ &= (a^3 - 4a^2 + 2a + 2)e^{-a} \end{aligned}$$

Le point d'intersection a bien l'ordonnée attendue.

2. Une tangente (T_a) passe par l'origine du repère $(0; 0)$ si et seulement si son ordonnée à l'origine (calculée à la question précédente) est nulle. Cela revient à résoudre l'équation :

$$(a^3 - 4a^2 + 2a + 2)e^{-a} = 0$$

Puisque pour tout réel a , l'exponentielle e^{-a} est strictement positive, l'équation équivaut à :

$$a^3 - 4a^2 + 2a + 2 = 0$$

Soit la fonction polynomiale P définie sur \mathbb{R} par $P(a) = a^3 - 4a^2 + 2a + 2$. Déterminons le nombre de racines de ce polynôme à l'aide de ses variations. Pour tout réel a , la dérivée est :

$$P'(a) = 3a^2 - 8a + 2$$

Cherchons les racines de P' avec le discriminant $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 64 - 24 = 40$. Le discriminant étant strictement positif, P' admet deux racines distinctes :

$$a_1 = \frac{8 - \sqrt{40}}{6} = \frac{4 - \sqrt{10}}{3} \approx 0,28 \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{8 + \sqrt{40}}{6} = \frac{4 + \sqrt{10}}{3} \approx 2,39$$

Le polynôme P est donc strictement croissant sur $] -\infty; a_1]$, strictement décroissant sur $[a_1; a_2]$, puis strictement croissant sur $[a_2; +\infty[$. Observons les valeurs aux extremums locaux :

- Le maximum local en a_1 est positif. En effet, $P(0) = 2$, et comme $a_1 > 0$ et P est croissante sur $] -\infty; a_1]$, on a $P(a_1) > P(0) > 0$.
- Le minimum local en a_2 est négatif. En effet, $P(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 + 2 \times 2 + 2 = 8 - 16 + 4 + 2 = -2$. Comme $a_2 > 2$ et P est croissante après a_2 , le minimum $P(a_2)$ est inférieur à $P(2)$, donc strictement négatif.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur les trois intervalles de monotonie stricte :

- Sur $] -\infty; a_1]$, P croît d'une limite $-\infty$ à un maximum strictement positif, il y a donc une unique racine.
- Sur $[a_1; a_2]$, P décroît d'un maximum positif à un minimum négatif, il y a une deuxième racine.
- Sur $[a_2; +\infty[$, P croît d'un minimum négatif vers une limite $+\infty$, il y a une troisième racine.

Le polynôme P admet exactement trois racines réelles distinctes. Par conséquent, il existe exactement trois tangentes à la courbe \mathcal{C}_f passant par l'origine du repère.