Métropole, 16 juin 2026

EXERCICE 1 (5 points)

1. Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\-2-1\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-2\\-1-1\\1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$$

On remarque que la troisième coordonnée de $\overrightarrow{AC}$ est nulle, alors que celle de $\overrightarrow{AB}$ ne l'est pas. Les vecteurs ne sont donc pas proportionnels : ils ne sont pas colinéaires. Les points A, B et C n'étant pas alignés, ils définissent bien un plan de l'espace.

2. (a) Calculons le produit scalaire du vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ avec les vecteurs directeurs du plan :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=1\times1+(-1)\times(-3)+4\times(-1)=1+3-4=0$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-2)+(-1)\times(-2)+4\times0=-2+2+0=0$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC). Il est donc bien un vecteur normal à ce plan.

(b) Le plan (ABC) admet le vecteur $\vec{n}$ pour vecteur normal, une de ses équations cartésiennes est donc de la forme :

$$1x-1y+4z+d=0, \quad \text{avec } d\in\mathbb{R}$$

Le point $A(2;1;1)$ appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation :

$$2-1+4(1)+d=0 \text{ donc } 5+d=0$$
$$\text{donc } d=-5$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc bien : $x-y+4z-5=0$.

3. La droite Δ est orthogonale au plan (ABC), elle admet donc le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Puisqu'elle passe par le point $D(0;0;2)$, une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases}x=0+1t\\y=0-1t\\z=2+4t\end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases}x=t\\y=-t\\z=2+4t\end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

4. Le projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC) est le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC). On substitue les coordonnées paramétriques de Δ dans l'équation de (ABC) :

$$\begin{aligned}(t)-(-t)+4(2+4t)-5&=0\\ 2t+8+16t-5&=0\\ 18t+3&=0\\ t&=-\frac{3}{18}=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

En remplaçant t par $-\frac{1}{6}$ dans la représentation paramétrique, on obtient les coordonnées de H :

$$x_H=-\frac{1}{6},\quad y_H=-\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6},\quad z_H=2+4\left(-\frac{1}{6}\right)=2-\frac{4}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

Le projeté orthogonal est bien le point $H\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{6};\frac{4}{3}\right)$.

5. (a) Calculons les longueurs BA et BC :

$$BA=\sqrt{(2-3)^2+(1-(-2))^2+(1-0)^2}=\sqrt{(-1)^2+3^2+1^2}=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$$
$$BC=\sqrt{(0-3)^2+(-1-(-2))^2+(1-0)^2}=\sqrt{(-3)^2+1^2+1^2}=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$$

Puisque $BA=BC$, le triangle ABC est isocèle en B.

(b) Soit I le milieu du segment $[AC]$. Le triangle étant isocèle en B, la médiane (BI) est également la hauteur issue de B. Les coordonnées de I sont $\left(\frac{2+0}{2};\frac{1-1}{2};\frac{1+1}{2}\right)=(1;0;1)$. Calculons la longueur de la hauteur BI :

$$BI=\sqrt{(1-3)^2+(0-(-2))^2+(1-0)^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$$

Calculons la longueur de la base AC :

$$AC=\sqrt{(0-2)^2+(-1-1)^2+(1-1)^2}=\sqrt{4+4+0}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

L'aire du triangle ABC est donc :

$$\mathscr{A}_{ABC}=\frac{AC\times BI}{2}=\frac{2\sqrt{2}\times 3}{2}=3\sqrt{2}$$

6. (a) La hauteur du tétraèdre $ABCD$ relative à la base ABC est la distance DH (puisque H est le projeté orthogonal de D sur cette base). Calculons DH :

$$\begin{aligned}DH&=\sqrt{\left(-\frac{1}{6}-0\right)^2+\left(\frac{1}{6}-0\right)^2+\left(\frac{4}{3}-2\right)^2}\\ &=\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{36}+\frac{4}{9}}\\ &=\sqrt{\frac{2}{36}+\frac{16}{36}}=\sqrt{\frac{18}{36}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Le volume est donc $V=\frac{1}{3}\times\mathscr{A}_{ABC}\times DH$:

$$V=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\times 2}{6}=1$$

(b) En changeant de base, le volume s'exprime également par $V = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{BCD} \times \text{distance}(A,(BCD))$. En utilisant la distance donnée de $\sqrt{2}$, on a :

$$1 = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{BCD} \times \sqrt{2}$$

Ce qui donne $\mathscr{A}_{BCD} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

7. (a) Les points A, B, C et D_k sont coplanaires si et seulement si D_k appartient au plan (ABC). Ses coordonnées doivent vérifier l'équation du plan :

$$0-0+4k-5=0 \text{ donc } 4k=5 \text{ donc } k=\frac{5}{4}=1{,}25$$

Lorsque $k = 1{,}25$, le point $D_{1,25}$ appartenant au plan, son projeté orthogonal sur le plan (ABC) est lui-même : le point $(0;0;1{,}25)$.

(b) Si A était le projeté orthogonal de D_k sur le plan (ABC), le vecteur $\overrightarrow{D_kA}$ serait un vecteur normal au plan, donc colinéaire à $\vec{n}$.

$$\overrightarrow{D_kA}\begin{pmatrix}2-0\\1-0\\1-k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1-k\end{pmatrix}$$

Dire qu'ils sont colinéaires signifie qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{D_kA} = \lambda\vec{n}$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} 2 = \lambda \times 1 \\ 1 = \lambda \times (-1) \\ 1-k = \lambda \times 4 \end{cases}$$

La première équation donne $\lambda = 2$ et la deuxième donne $\lambda = -1$, ce qui est une contradiction. Il n'existe donc aucune valeur de k pour laquelle A est le projeté orthogonal de D_k sur (ABC).

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A : modèle discret

1. La relation est $V_{n+1} = 0{,}995V_n + 6$ avec $V_0 = 0$.

$V_1 = 0{,}995 \times 0 + 6 = 6$
$V_2 = 0{,}995 \times 6 + 6 = 5{,}97 + 6 = 11{,}97$

2. Le script python complété est le suivant :

```
def volume(n):
    v = 0
    for k in range(n):
        v = 0.995 * v + 6
    return v
```

3. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, la propriété $\mathscr{P}_n$: « $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$ » est vraie.
   - **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $V_0 = 0$ et $V_1 = 6$. L'enchaînement $0 \leq 6 \leq 1200$ est bien vérifié. $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :** Soit n un entier naturel fixé. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$. En multipliant cette double inégalité par le réel strictement positif 0,995, on obtient :

     $$0{,}995V_n \leq 0{,}995V_{n+1} \leq 0{,}995 \times 1200$$

     Soit :

     $$0{,}995V_n \leq 0{,}995V_{n+1} \leq 1194$$

     En ajoutant 6 à chaque membre :

     $$0{,}995V_n + 6 \leq 0{,}995V_{n+1} + 6 \leq 1194 + 6$$

     On reconnaît les expressions des termes suivants, ce qui donne :

     $$V_{n+1} \leq V_{n+2} \leq 1200$$

     La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. L'hérédité est prouvée.
   - **Conclusion :** Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$.

4. D'après la question précédente, la suite (V_n) est croissante (car $V_n \leq V_{n+1}$) et elle est majorée par 1200. D'après le théorème de la convergence monotone, la suite (V_n) est convergente vers une limite réelle L. D'après les opérations sur les limites, on a

$$\begin{aligned} L &= 0{,}995L + 6 \\ L - 0{,}995L &= 6 \\ 0{,}005L &= 6 \\ L &= \frac{6}{0{,}005} = 1200 \end{aligned}$$

La limite de la suite est 1200.

Partie B : modèle continu

1. (a) L'équation différentielle (E) est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}005$ et $b = 6$. Les solutions sur $[0;+\infty[$ sont de la forme $Ce^{at} - \frac{b}{a}$. On calcule $-\frac{b}{a} = -\frac{6}{-0{,}005} = 1200$. Les solutions sont donc les fonctions définies par $y(t) = Ce^{-0{,}005t} + 1200$ (où $C \in \mathbb{R}$).

   (b) L'énoncé précise que le volume initial est nul, donc $v(0) = 0$.

   $$Ce^0 + 1200 = 0 \text{ donc } C = -1200$$

   Pour tout réel $t \geq 0$, on a donc $v(t) = -1200e^{-0{,}005t} + 1200 = 1200(1 - e^{-0{,}005t})$.

   (c) Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}005t = -\infty$, par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}005t} = 0$. Par produit et somme, on en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 1200$.

(d) La dérivée est donnée par $v'(t) = -1200 \times (-0{,}005)e^{-0{,}005t} = 6e^{-0{,}005t}$. Pour tout réel $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive, donc $v'(t) > 0$. La fonction v est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. Le seuil d'alerte correspondant à 5 % du volume du bassin est de $0{,}05 \times 30\,000 = 1500$ litres. Or, d'après l'étude précédente, la fonction v est strictement croissante et admet pour limite 1200 en $+\infty$. Le volume de la substance ne dépassera donc jamais 1200 litres. Par conséquent, $1200 < 1500$, le nettoyage ne sera pas nécessaire selon ce modèle.

3. On cherche l'instant t tel que $v(t) = 50$.

$$\begin{aligned} 1200(1 - e^{-0{,}005t}) &= 50 \\ 1 - e^{-0{,}005t} &= \frac{50}{1200} = \frac{1}{24} \\ e^{-0{,}005t} &= 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24} \\ -0{,}005t &= \ln\left(\frac{23}{24}\right) \\ t &= \frac{\ln\left(\frac{23}{24}\right)}{-0{,}005} \approx 8{,}517 \text{ heures} \end{aligned}$$

On convertit la partie décimale : $0{,}517 \times 60 \approx 31$ minutes. Le volume dépassera 50 litres au bout d'environ 8 heures et 31 minutes.

EXERCICE 3 (4 points)

1. **AFFIRMATION 1 : VRAIE**
Soit P l'évènement « la personne joue de la Pop ».
D'après l'énoncé, on a : $p(P) = 0{,}52$; $p_P(F) = 0{,}32$; $p(F) = 0{,}20$. Calculons la probabilité de l'intersection :
$$p(P \cap F) = p(P) \times p_P(F) = 0{,}52 \times 0{,}32 = 0{,}1664$$
On cherche la probabilité conditionnelle $p_F(P)$:
$$p_F(P) = \frac{p(P \cap F)}{p(F)} = \frac{0{,}1664}{0{,}20} = 0{,}832$$
L'affirmation est donc bien vraie.

2. • **AFFIRMATION 2 : FAUSSE**
La variable aléatoire X modélise un tirage avec remise de $n = 5000$ personnes, avec une probabilité de succès $p = 0{,}062$. Elle suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(5000\,;\,0{,}062)$.
On cherche $p(X \leq 340)$.
À l'aide de la calculatrice, pour cette loi binomiale, on trouve $p(X \leq 340) \approx 0{,}961$. C'est très éloigné de 0,4. L'affirmation est fausse.

• **AFFIRMATION 3 : VRAIE**

Rappelons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour tout $a \geq 0$, on a $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$.
L'espérance de X est $E(X) = 5000 \times 0{,}062 = 310$.
L'encadrement cherché est $230 < X < 390$, ce qui s'écrit de manière centrée autour de la moyenne : $-80 < X - 310 < 80$, soit $|X - 310| < 80$.
Calculons la variance : $V(X) = n \times p \times (1-p) = 5000 \times 0{,}062 \times 0{,}938 = 290{,}78$.
On choisit $a = 80$:

$$P(|X - 310| \geq 80) \leq \frac{290{,}78}{80^2} = \frac{290{,}78}{6400} \approx 0{,}0454$$

En passant par l'évènement contraire :

$$P(|X - 310| < 80) \geq 1 - 0{,}0454 = 0{,}9546$$

Puisque $0{,}9546 > 0{,}95$, l'affirmation est vraie.

3. **AFFIRMATION 4 : VRAIE**
Former une équipe nécessite de choisir **sans ordre** 2 musiciens parmi les 4 professionnels, ET de choisir 3 personnes parmi les 6 non-professionnels. Il s'agit de combinaisons. Le nombre d'équipes possibles est :

$$\binom{4}{2} \times \binom{6}{3} = \left(\frac{4 \times 3}{2}\right) \times \left(\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}\right) = 6 \times 20 = 120$$

L'affirmation est vraie.

EXERCICE 4 (6 points)

Partie A

1. (a) La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point C d'abscisse 1. Le coefficient directeur de cette tangente est donc nul, ce qui signifie que $f'(1) = 0$.

   (b) La courbe passe par le point $A\left(\frac{1}{2};0\right)$. L'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle donné est donc $x = 0{,}5$.

2. La valeur $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ correspond au coefficient directeur de la tangente T_A au point A. Cette droite passe par $A\,(0{,}5;0)$ et par $B(1;e^2)$.

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{e^2 - 0}{1 - 0{,}5} = \frac{e^2}{0{,}5} = 2e^2$$

Partie B

1. Pour tout réel $x \in [0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} e^2 \times \frac{2x-1}{e^{2x-1}} &= e^2 \times (2x-1) \times e^{-(2x-1)} \\ &= (2x-1) \times e^{2-2x+1} \\ &= (2x-1)e^{-2x+3} \end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression $f(x)$.

2. (a) Posons $X = 2x-1$. Lorsque $x \to +\infty$, alors $X \to +\infty$.
On exprime f en fonction de X : $f(x) = e^2 \frac{X}{e^X}$.
D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, on en déduit par inverse que $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$.
Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   (b) Introduisons les fonctions u et v telles que $u(x) = 2x-1$ et $v(x) = e^{-2x+3}$.
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -2e^{-2x+3}$.
En appliquant la formule de la dérivée d'un produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2e^{-2x+3} + (2x-1)(-2)e^{-2x+3} \\ &= (2-4x+2)e^{-2x+3} \\ &= (-4x+4)e^{-2x+3} \end{aligned}$$

L'expression est bien démontrée.

3. Le signe de la dérivée ne dépend que de celui de $-4x+4$, car l'exponentielle est toujours strictement positive. La fonction s'annule en $x = 1$. Elle est strictement positive sur $[0;1[$ et strictement négative sur $]1;+\infty[$. Calculons les images : $f(0) = (0-1)e^3 = -e^3$ et $f(1) = (2-1)e^1 = e$.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-e^3$	↗	e	↘	0

4. Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante (de $e \approx 2{,}71$ vers la limite 0). Puisque $0{,}15 \in]0;e]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0{,}15$ admet une unique solution α dans cet intervalle. Par balayage à la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 3{,}3$. En effet, $f(3{,}2) \approx 0{,}18$ et $f(3{,}3) \approx 0{,}153$.

Partie C

1. Calculons l'intégrale $I = \displaystyle\int_{0{,}5}^{3{,}3} (2x-1)e^{-2x+3}\,dx$.
Introduisons les fonctions u et v telles que, pour tout $x \in [0{,}5;3{,}3]$:
   - $u(x) = 2x-1$ donc $u'(x) = 2$
   - $v'(x) = e^{-2x+3}$ donc $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$

Ces fonctions u et v étant dérivables, de dérivées continues sur $[0{,}5;3{,}3]$ appliquons la formule d'intégration

par parties :

$$\begin{aligned}
I &= \left[(2x-1)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x+3}\right)\right]_{0,5}^{3,3} - \int_{0,5}^{3,3} 2\left(-\frac{1}{2}e^{-2x+3}\right)dx \\
&= \left[\left(-x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}\right]_{0,5}^{3,3} + \int_{0,5}^{3,3} e^{-2x+3}\,dx \\
&= \left[\left(-x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}\right]_{0,5}^{3,3} + \left[-\frac{1}{2}e^{-2x+3}\right]_{0,5}^{3,3} \\
&= \left[(-x)e^{-2x+3}\right]_{0,5}^{3,3}
\end{aligned}$$

Évaluons aux bornes :

$$\begin{aligned}
I &= (-3{,}3e^{-2(3,3)+3}) - (-0{,}5e^{-2(0,5)+3}) \\
&= -3{,}3e^{-3,6} + 0{,}5e^{2}
\end{aligned}$$

À la calculatrice, on obtient $I \approx 3{,}694 - 0{,}090 \approx 3{,}604$. Arrondie au dixième, l'intégrale est bien égale à 3,6.

2. L'aire de la portion supérieure correspond exactement à l'intégrale calculée, puisque la fonction f est positive sur $[0{,}5;3{,}3]$. Le logo étant symétrique par rapport à l'axe des abscisses, l'aire totale de sa surface est le double de cette intégrale :

$$\text{Aire du logo} \approx 2 \times 3{,}604 \approx 7{,}208 \text{ cm}^2$$

Le volume du porte-clé s'obtient en multipliant par l'épaisseur (0,2 cm) :

$$\mathscr{V} \approx 7{,}208 \times 0{,}2 \approx 1{,}4416 \text{ cm}^3$$

Arrondi au dixième, le volume du porte-clé est de 1,4 cm^3.