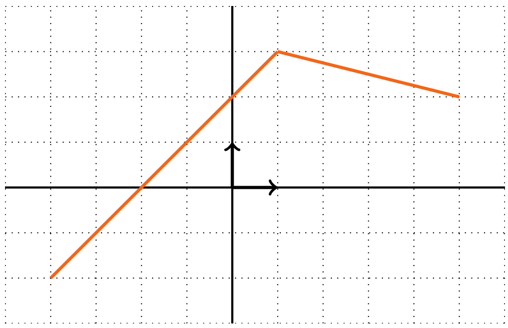
Exercices : Calcul intégral

1 Intégrale d'une fonction continue positive

► **Exercice 1**

On considère une fonction f dont la courbe représentative est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé



Déterminer les valeurs des intégrales suivantes

$\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)dx$ $\displaystyle\int_{0}^{5} f(x)dx$

$\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)dx$ $\displaystyle\int_{-2}^{5} f(x)dx$

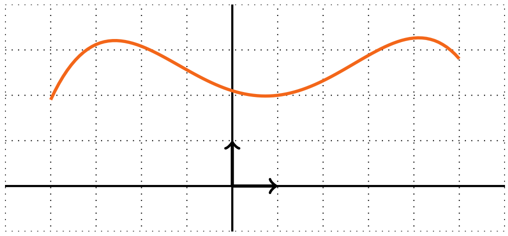
■ **Correction 1 :**

- $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)dx$ est l'aire d'un triangle et vaut $\dfrac{2\times 2}{2}=2$
- $\displaystyle\int_{0}^{5} f(x)dx$ est l'aire de deux trapèzes. Le premier a une aire de $\dfrac{(2+3)\times 1}{2}$ et le deuxième une aire de $\dfrac{(3+2)\times 4}{2}$. L'aire total vaut donc 12.5.
- $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)dx$ est l'aire de deux trapèzes. Le premier a une aire de $\dfrac{(1+3)\times 2}{2}$ et le deuxième a une aire de $\dfrac{(3+2.5)\times 2}{2}$. L'aire totale vaut donc 9.5.
- Pour calculer l'aire $\displaystyle\int_{-2}^{5} f(x)dx$, il suffit d'ajouter les aires $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{0}^{5} f(x)dx$. L'aire recherchée vaut donc 14.5

■

► Exercice 2

On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.



Donner un encadrement de $\displaystyle\int_{-4}^{5} f(x)dx$

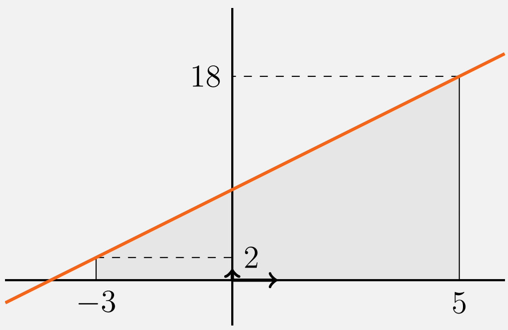
■ **Correction 2 :** Il est possible d'encadrer l'intégrale en comptant le nombre de carreaux sous la courbe pour avoir un minorant. On ajoute les carreaux que la courbe traverse pour obtenir un majorant. On a donc $19 \leqslant \displaystyle\int_{-4}^{5} f(x)dx \leqslant 30$. Cet encadrement peut largement être amélioré (en ne considérant que des demi-carreaux par exemple).

■

► Exercice 3

Pour tout réel x, on pose $f(x) = 2x + 8$. Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)dx$.

■ **Correction 3 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = 2x + 8$. $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)dx$ désigne l'aire ci-dessous

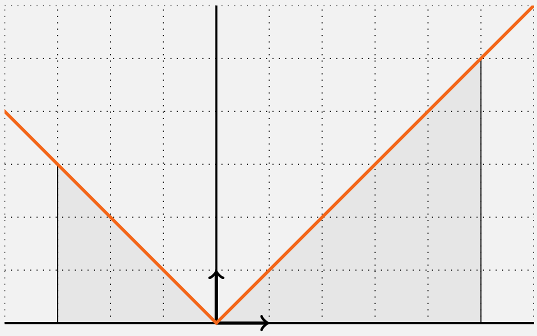


Il s'agit de l'aire d'un trapèze dont les bases ont pour longueur 2 et 18 et la hauteur a pour longueur 8. Cette aire vaut donc $\dfrac{(2+18)\times 8}{2}$. Ainsi, $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)dx = \frac{2+18}{2} \times 8 = 80$. ■

► Exercice 4

On rappelle que pour tout réel x, $|x| = \max(x, -x)$. Déterminer $\displaystyle\int_{-3}^{5} |x|dx$

■ **Correction 4 :** L'intégrale $\displaystyle\int_{-3}^{5} |x|dx$ est représentée par l'aire ci-dessous.

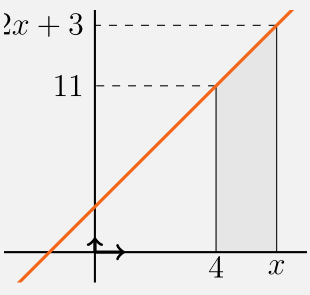


Il s'agit de l'aire de deux triangles. Le premier a une aire de $\dfrac{3\times 3}{2}$ et le deuxième une aire de $\dfrac{5\times 3}{2}$. Ainsi, $\displaystyle\int_{-3}^{5} |x|dx = 17$. ■

► Exercice 5

Soit x un réel supérieur ou égal à 4. Exprimer $\displaystyle\int_{4}^{x} (2t+3)dt$ en fonction de x.

■ **Correction 5 :** L'intégrale $\displaystyle\int_{4}^{x} (2t+3)dt$ représente l'aire de la surface grisée ci-dessous.



Il s'agit de l'aire d'un trapèze dont les bases ont pour longueur 11 et $2x+3$ et la hauteur a pour longueur $x-4$. Cette aire vaut donc $\dfrac{(2x+3+11)\times(x-4)}{2}$ soit $x^2+3x-28$.

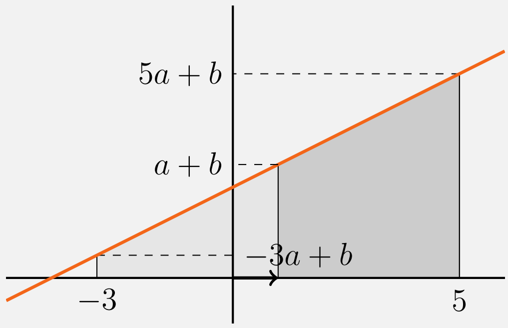
Ainsi, $\displaystyle\int_{4}^{x} (2t+3)dt = x^2+3x-28$

■

▶ Exercice 6

Soit f une fonction affine que l'on suppose positive sur $[-3;5]$, telle que $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)dx = 24$ et $\displaystyle\int_{1}^{5} f(x)dx = 14$. Donner une expression de $f(x)$ pour tout réel x.

■ **Correction 6 :** Soit a et b deux réels tels que, pour tous réels x, $f(x) = ax + b$. Représentons la situation



L'aire $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)dx$ correspond à l'aire jointe des deux trapèzes.

Celle-ci vaut $\dfrac{-3a+b+5a+b}{2} \times (5-(-3)) = 8(a+b)$.

L'aire $\displaystyle\int_{1}^{5} f(x)dx$ correspond à l'aire du trapèze foncé.

Celle-ci vaut $\dfrac{a+b+5a+b}{2} \times (5-1) = 2(6a+2b)$.

Ainsi, on a $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)dx = 24$ et $\displaystyle\int_{1}^{5} f(x)dx = 14$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} 8(a+b) = 24 \\ 2(6a+2b) = 14 \end{array}\right.$.

Ce système est équivalent à $\left\{\begin{array}{l} a+b = 3 \\ 6a+2b = 7 \end{array}\right.$.

En soustrayant deux fois la première ligne à la deuxième ligne, on obtient $\left\{\begin{array}{l} a+b = 3 \\ 4a = 1 \end{array}\right.$.

Finalement, $\left\{\begin{array}{l} b = \frac{11}{4} \\ a = \frac{1}{4} \end{array}\right.$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{11}{4}$.

■

2 Intégrale et primitives

► Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{-5}^{7} \sqrt{2}dx \qquad \int_{3}^{14} \frac{1}{x}dx \qquad \int_{1}^{9} \frac{3}{2\sqrt{x}}dx$$

■ Correction 7 :

- $\displaystyle\int_{-5}^{7} \sqrt{2}dx = [\sqrt{2}x]_{-5}^{7} = \sqrt{2}(7-(-5)) = 12\sqrt{2}$. Il est aussi possible de procéder à un calcul d'aire.
- $\displaystyle\int_{3}^{14} \frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_3^{14} = \ln(14) - \ln(3) = \ln\left(\frac{14}{3}\right)$
- $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{3}{2\sqrt{x}}dx = \left[3\sqrt{x}\right]_1^9 = 6$

■

► Exercice 8

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-2}^{4} (x^2+3x+4)dx \qquad \int_{-1}^{1} (x^4-x^2+x-1)dx \qquad \int_{-2}^{2} (8x^5+5x^3+2x)dx$$

■ Correction 8 :

- $\displaystyle\int_{-2}^{4} (x^2+3x+4)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_{-2}^{4}$
  d'où $\displaystyle\int_{-2}^{4} (x^2+3x+4)dx = \frac{4^3}{3} + \frac{3}{2} \times 4^2 + 4 \times 4 - \left(\frac{(-2)^3}{3} + \frac{3}{2} \times (-2)^2 + 4 \times (-2)\right) = 66$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^4-x^2+x-1)dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{1} = -\frac{34}{15}$
- $\displaystyle\int_{-2}^{2} (8x^5+5x^3+2x)dx = \left[\frac{4}{3}x^6 + \frac{5}{4}x^4 + x^2\right]_{-2}^{2} = 0$. On aurait également pu tout simplement remarquer que la fonction intégrée était impaire et l'intervalle d'intégration symétrique par rapport à 0.

■

► Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{0}^{1} e^{2x}dx \qquad \int_{0}^{10} e^{-5x}dx \qquad \int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}dx$$

■ **Correction 9 :**

- $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2-1}{2}$
- $\displaystyle\int_0^{10} e^{-5x}dx = \left[\frac{e^{-5x}}{-5}\right]_0^{10} = -\frac{e^{-50}}{5}+\frac{1}{5}$. Attention à d'éventuelles erreurs de signe ici !
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$

■

► **Exercice 10**

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^2 ((x+1)(x+2))\,dx \qquad \int_1^2 \frac{x+1}{x^3}dx \qquad \int_3^7 \frac{1}{x^2}dx$$

■ **Correction 10 :** .

- $\displaystyle\int_0^2 ((x+1)(x+2))\,dx = \int_0^2 (x^2+3x+2)dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^2 = \frac{38}{3}$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x^3}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx = \left[-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2 = \frac{7}{8}$
- $\displaystyle\int_3^7 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_3^7 = \frac{4}{21}$

■

► **Exercice 11**

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-2}^4 2xe^{x^2}dx \qquad \int_2^e \frac{1}{x\ln(x)}dx \qquad \int_1^3 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$$

■ **Correction 11 :**

- Pour tout réel $x\in[-2;4]$, on pose $u(x)=x^2$. On a alors $u'(x)=2x$ et $2xe^{x^2}=u'(x)\times e^{u(x)}$. Une primitive de $x\mapsto 2xe^{x^2}$ sur $[-2;4]$ est donc la fonction $x\mapsto e^{x^2}$. Ainsi,

$$\int_{-2}^4 2xe^{x^2}dx = \left[e^{x^2}\right]_{-2}^4 = e^{16}-e^4$$

- Pour tout réel $x\in[2;e]$, on pose $u(x)=\ln(x)$ (qui est alors strictement positif). On a alors $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x\ln(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $[2;e]$ est donc la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$. Ainsi,

$$\int_2^e \frac{1}{x\ln(x)}dx = [\ln\ln(x)]_2^e = -\ln(\ln(2))$$

- Pour tout réel $x \in [1;3]$, on pose $u(x) = \dfrac{1}{x}$. On a alors $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{e^{1/x}}{x^2} = -\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{1/x} = -u'(x) \times e^{u(x)}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$ sur $[1;3]$ est donc la fonction $x \mapsto -e^{1/x}$. Ainsi,

$$\int_1^3 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = \left[-e^{1/x}\right]_1^3 = e - e^{1/3}$$

■

► **Exercice 12**

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^4 \frac{2x}{1+x^2}dx \qquad \int_{-1}^4 \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}dx \qquad \int_{-3}^2 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$$

■ **Correction 12 :**

- Pour tout réel $x \in [0;4]$, on pose $u(x) = 1+x^2$. On a alors $u'(x) = 2x$ et $\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ sur $[0;4]$ est donc la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$. Ainsi,

$$\int_0^4 \frac{2x}{1+x^2}dx = \left[\ln(1+x^2)\right]_0^4 = \ln(17)$$

- Pour tout réel $x \in [-1;4]$, on pose $u(x) = 9+x^2$. On a alors $u'(x) = 2x$ et $\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{9+x^2}} = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}}$ sur $[-1;4]$ est donc la fonction $x \mapsto \sqrt{9+x^2}$. Ainsi,

$$\int_{-1}^4 \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}dx = \left[\sqrt{9+x^2}\right]_{-1}^4 = 5 - \sqrt{10}$$

- Pour tout réel $x \in [-3;2]$, on pose $u(x) = 1+e^x$. On a alors $u'(x) = e^x$ et $\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} = -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ sur $[-3;2]$ est donc la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{1+e^x}$. Ainsi,

$$\int_{-3}^2 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_{-3}^2 = \frac{1}{1+e^{-3}} - \frac{1}{1+e^2}$$

■

► Exercice 13
Pour tout réel $x > -1$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

1. Montrer que pour tout réel $x > -1$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$
2. En déduire une primitive de f sur $]-1;+\infty[$
3. Calculer alors $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx$

■ Correction 13 :

1. Pour tout réel $x > -1$,
$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} = f(x)$$
2. Une primitive de f sur $]-1;+\infty[$ est donc $F : x \mapsto \ln(x+1) + \dfrac{1}{x+1}$
3. $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx = \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right]_1^3 = \ln(4) + \frac{1}{4} - \ln(2) - \frac{1}{2} = \ln(2) - \frac{1}{4}$

■

► Exercice 14
On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{, si } x < -1 \\ 2x^3 - x + 1 & \text{, si } x \geqslant -1 \end{cases}$.

Vérifier que f est continue sur $[-4;1]$ puis calculer $\displaystyle\int_{-4}^{1} f(t)dt$

■ Correction 14 : Le seul problème éventuel se situe en -1. On a $\displaystyle\lim_{x\to -1^1} f(x) = (-1)^2 + (-1) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = 2\times(-1)^3 - (-1) + 1 = 0$. Ainsi, f est continue sur $[-4;1]$.
D'après la relation de Chasles,

$$\int_{-4}^{1} f(t)dt = \int_{-4}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-4}^{-1} (t^2+t)dt + \int_{-1}^{1} (2t^3 - t + 1)dt$$

Or,

- $\displaystyle\int_{-4}^{-1} (t^2+t)dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_{-4}^{-1} = \frac{27}{2}$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2t^3 - t + 1)d = \left[\frac{t^4}{2} - \frac{t^2}{2} + t\right]_{-1}^{1} = 2$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-4}^{1} f(t)dt = \frac{31}{2}$ ■

► Exercice 15

Déterminer la valeur de $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$ en utilisant celle de $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$.

■ Correction 15 : On a

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx = \int_0^1 \frac{1+e^x}{1+e^x}dx = \int_0^1 1dx = 1$$

Par ailleurs, si on pose pour tout $x \in [0,1]$, $u(x) = 1+e^x$, on a $\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{u'(x)}{1+u(x)}$. u étant strictement positive, une primitive de $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ sur $[0;1]$ est la fonction $x \mapsto \ln(1+e^x)$. Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

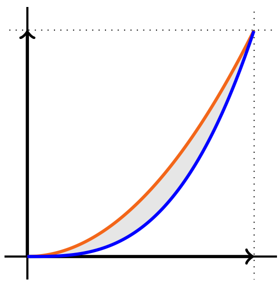
Finalement,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) = \ln(e) - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) = \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)$$

■

► Exercice 16

On a tracé ci-dessous, dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^3$ sur l'intervalle $[0;1]$.



1. Justifier que, pour tout réel $x \in [0;1]$, $f(x) \geqslant g(x)$.
2. Calculer l'aire de la surface grisée.

■ Correction 16 : 1. Soit $x \in [0;1]$. On a alors $0 \leqslant x \leqslant 1$ puis, en multipliant cette ingéalité par x^2, $0 \leqslant x^3 \leqslant x^2$, et donc $g(x) \leqslant f(x)$.

2. L'aire de la surface grisée vaut

$$\int_0^1 (f-g)(x)dx = \int_0^1 (x^2-x^3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

■

► Exercice 17

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n e^{-x^2} dx$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $-x^2 \leqslant -2x+1$ et que $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \dfrac{e}{2}$
4. En déduire que la suite (u_n) converge. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

■ **Correction 17 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n e^{-x^2} dx$

1. Pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} e^{-x^2 dx} - \int_0^n e^{-x^2 dx} = \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx$$

Puisque pour tout réel x entre n et $n+1$, $e^{-x^2} > 0$, il en vient que $\int_n^{n+1} e^{-x^2} dx \geqslant 0$ et donc $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite (u_n) est croissante.

2. Soit $x \geqslant 0$. Alors $(x-1)^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire, $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$ et donc $-x^2 \leqslant -2x+1$. La fonction exponentielle étant croissante, on a alors $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$
3. Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \int_0^n e^{-x^2} dx \leqslant \int_0^n e^{-2x+1} dx = \left[\frac{e^{-2x+1}}{-2}\right]_0^n = -\frac{e^{2n+1}}{2} + \frac{e}{2} \leqslant \frac{e}{2}$$

4. La suite (u_n) est croissante et majorée : cette suite est donc convergente.

■

► Exercice 18

Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto 3x+2$ sur $[-2;3]$

■ **Correction 18 :** La valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto 3x+2$ sur $[-2;3]$ vaut

$$\frac{1}{3-(-2)} \int_{-2}^3 (3x+2)dx = \frac{1}{5}\left[\frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^3 = \frac{7}{2}$$

■

► Exercice 19

Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 4x$ sur $[0;4]$

■ Correction 19 : La valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 4x$ sur $[0;4]$ vaut

$$\frac{1}{4-(0)} \int_0^4 (-x^2+4x)dx = \frac{1}{4}\left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{1}{4} \times \frac{32}{3} = \frac{8}{3}$$

■

► Exercice 20

Un bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x milliers de pièces est égal à :

$$f(x) = \frac{5\ln(x)}{x} + 3$$

1. Montrer que $F : x \mapsto \dfrac{5\ln(x)^2}{2} + 3x$ est une primitive de f sur $[2;4]$
2. Calculer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie de 2000 à 4000 pièces.

■ Correction 20 :

1. On rappelle que si u est dérivable sur un intervalle I, alors u^2 l'est également et $(u^2)' = 2u'u$. Pour tout réel $x \in [2;4]$,

$$F'(x) = \frac{5}{2} \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) + 3 = f(x)$$

F est donc une primitive de f sur $[2;4]$.

2. La valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie de 2000 à 4000 pièces vaut

$$\frac{1}{4-2}\int_2^4 f(x)dx = \frac{1}{2}[F(x)]_2^4 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5\ln(4)^2}{2} + 3\times 4 - \frac{5\ln(2)^2}{2} - 3 \times 2\right)$$

En utilisant le fait que $\ln(4) = 2\ln(2)$, on obtient

$$\frac{1}{4-2}\int_2^4 f(x)dx = 3 + \frac{15\ln(2)^2}{4}$$

■

► Exercice 21

Soit f une fonction affine. Montrer que la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a,b]$ vaut $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

■ **Correction 21 :** Soit m et p les réels tels que, pour tout réel x, $f(x) = mx + p$. La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ vaut

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (mx+p)dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{mx^2}{2}+px\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\times\left(\frac{mb^2-ma^2}{2}+p(b-a)\right)$$

puis

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (mx+p)dx = \frac{1}{b-a}\times(b-a)\times\left(\frac{m(b+a)+2p}{2}\right)$$

et donc

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (mx+p)dx = \frac{mb+ma+2p}{2} = \frac{ma+p+mb+p}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

■

3 Intégration par parties

► Exercice 22

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^4 x\ln(x)dx$. On pourra poser $v = \ln$ et déterminer une fonction u tel que pour tout réel x, $u'(x) = x$.

■ **Correction 22 :** Pour tout réel $x \in [1;4]$, on pose...

- $v(x) = \ln(x)$. On a alors $v'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $u(x) = \dfrac{x^2}{2}$ de sorte que $u'(x) = \dfrac{x^2}{2}$

On souhaite alors calculer $\displaystyle\int_1^4 (u'v)(x)dx$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_1^4 (u'v)(x)dx = [uv]_1^4 - \int_1^4 (uv')(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}dx = 8\ln(4) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^4 = 8\ln(4) - \frac{15}{4}$$

■

► Exercice 23

En utilisant deux intégrations par parties successives, déterminer $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x dx$

■ **Correction 23 :** On souhaite calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x dx$

Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose...

- $v(x) = x^2$. On a alors $v'(x) = 2x$
- $u(x) = e^x$ de sorte que $u'(x) = e^x$

On souhaite alors calculer $\displaystyle\int_0^1 (u'v)(x)dx$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 (u'v)(x)dx = [uv]_0^1 - \int_0^1 (uv')(x)dx = \left[x^2e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = e - 2\int_0^1 xe^x dx$$

On souhaite maintenant calculer $\displaystyle\int_0^1 2xe^x dx$

- Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $v_2(x) = x$. On a alors $v_2'(x) = 1$
- Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $u_2(x) = e^x$ de sorte que $u_2'(x) = e^x$

On cherche alors à calculer $\displaystyle\int_0^1 (u_2'v_2)(x)dx$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 (u_2'v_2)(x)dx = [u_2v_2]_0^1 - \int_0^1 (u_2v_2')(x)dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

Finalement,

$$\int_0^1 x^2e^x dx = e - 2$$

■

► **Exercice 24**

Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x}dx \quad \text{et, si } n \geqslant 1, I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}dx$$

1. Calculer la valeur exacte de I_0
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n,

   $$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$$

3. En déduire les valeurs de I_1 et I_2.

■ **Correction 24 :** 1. On a $I_0 = \int_0^1 e^{1-x}dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = e - 1$

2. Soit n un entier naturel.
   - Pour tout réel $x \in [0,1]$, on pose $v(x) = x^{n+1}$. On a alors $v'(x) = (n+1)x^n$
   - Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $u(x) = -e^{1-x}$ de sorte que $u'(x) = e^{1-x}$

   Ainsi,

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}dx = \int_0^1 (u'v)(x)dx$$

   D'après la formule d'intégrations par parties,

$$I_{n+1} = \left[-x^{n+1}e^{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \times (-e^{1-x})dx = -1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}dx = -1+(n+1)I_n$$

3. Ainsi,
   - $I_1 = -1 + 1 \times I_0 = -1 + e - 1 = e - 2$
   - $I_2 = -1 + 2 \times I_1 = -1 + 2(e-2) = 2e - 5$

■

► **Exercice 25**

Soit t un réel strictement supérieur à 1.

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^t \ln(x)dx$. On pourra poser $v = \ln$ et déterminer une fonction u tel que pour tout réel x, $u'(x) = 1$.

■ **Correction 25 :** Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $v(x) = \ln(x)$ et $u(x) = x$. Ainsi, par intégration par parties,

$$\int_1^t \ln(x)dx = \int_1^t u'(x)v(x)dx = [uv]_1^t - \int_1^t u(x)v'(x)dx$$

Il en vient que

$$\int_1^t \ln(x)dx = [x\ln(x)]_1^t - \int_1^t 1dx = t\ln(t) - t - 1$$

En particulier, la fonction $t \mapsto t\ln(t) - t$ est une primitive de $\ln$ sur $[1;+\infty[$ (mais aussi sur $]0;+\infty[$ en réalité !).

■

► Exercice 26

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^2e^{-x}$

1. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Trouver deux réels m et M tels que pour tout réel $x \in [0;4]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$
3. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx$.
4. Chercher trois réels a, b et c tels que la fonction $x \mapsto (ax^2+bx+c)e^{-x}$ soit une primitive de f et en déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx$.
5. Retrouver cette valeur à l'aide de deux intégrations par parties successives.

■ Correction 26 :

1. D'eun part, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

   Par ailleurs, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

   $$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \times (-e^{-x}) = x(2-x)e^{-x}$$

   On en déduit le tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-4}$	$\searrow$	0

2. D'après la question précédente, pour tout réel $x \in [0;4]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 4e^{-4}$.
3. On en déduit que $\displaystyle\int_0^4 0dx \leqslant \int_0^4 f(x)dx \leqslant \int_0^4 4e^{-4}dx$ soit $0 \leqslant \displaystyle\int_0^4 f(x)dx \leqslant 16e^{-4}$.
4. Soit $g : x \mapsto (ax^2+bx+c)e^{-x}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

   $$g'(x) = (2ax+b)e^{-x} - (ax^2+bx+c)e^{-x} = (-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x}$$

   Il suffit alors de prendre a, b et c de telle sorte que $-a = 1$, $2a-b = 0$ et $b-c = 0$. Ainsi, $a = -1$, $b = -2$ et $c = -2$ conviennent. Une primitive de f est donc $g : x \mapsto -(x^2+2x+2)e^{-x}$.
   De fait,

   $$\int_0^4 f(x)dx = \left[-(x^2+2x+2)e^{-x}\right]_0^4 = 2 - 26e^{-4}$$

5. Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = -e^{-x}$. On a alors $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^{-x}$. D'après la formule d'intégration par parties, on a

$$\int_0^4 x^2e^{-x}dx = \int_0^4 (uv')(x)dx = [uv]_0^4 - \int_0^4 (u'v)(x)dx$$

Ainsi,

$$\int_0^4 x^2e^{-x}dx = \left[-x^2e^{-x}\right]_0^4 - \int_0^4 2x \times (-e^{-x})dx = -16e^{-4} + 2\int_0^4 xe^{-x}dx$$

Pour tout réel x, on pose alors $w(x) = x$. D'après la formule d'intégration par parties, on a

$$\int_0^4 xe^{-x}dx = \int_0^4 (wv')(x)dx = [wv]_0^4 - \int_0^4 (w'v)(x)dx$$

et donc

$$\int_0^4 xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^4 - \int_0^4 -e^{-x}dx = -4e^{-4} - \left[e^{-x}\right]_0^4 = 1 - 5e^{-4}$$

Ainsi,

$$\int_0^4 x^2e^{-x}dx = -16e^{-4} + 2(1-5e^{-4}) = 2 - 26e^{-4}$$

■

► **Exercice 27**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$

1. Calculer I_0
2. Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. Que peut-on en déduire ?
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n et tout $x \in [0;1]$, $x^n \ln(1+x) \leqslant x^n$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$
4. (a) En effectuant une intégration par partie, montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

   (b) Étudier la convergence de la suite (nI_n).

■ **Correction 27 :** 1. On a $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)dx$. On procède à une intégration par parties, en posant, pour tout réel x entre 0 et 1, $u(x) = x$ (et donc $u'(x) = 1$) et $v(x) = \ln(1+x)$. Ainsi,

$$\int_0^1 \ln(1+x)dx = [x\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$$

D'une part, $[x\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$. Par ailleurs, pour tout réel $x \in [0;1]$, $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$. Ainsi,

$$\int_0^1 \ln(1+x)dx = \ln(2) - [x - \ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - (1 - \ln(2)) = 2\ln(2) - 1$$

2. Pour tout entier naturel n, pour tout réel $x \in [0;1]$ on a $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$. Par ailleurs, pour tout réel $x \in [0;1]$, $1 + x \geqslant 1$ et donc, en appliquant la fonction logarithme népérien qui est croissante sur $[1;+\infty[$, on a donc que $\ln(1+x) \geqslant 0$. Finalement, pour tout entier naturel n, pour tout réel $x \in [0;1]$, $0 \leqslant x^{n+1}\ln(1+x) \leqslant x^n\ln(1+x)$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on a donc que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est positive et décroissante, elle est donc convergente.
3. (a) Pour tout $x \in [0{,}1]$, $1 \leqslant 1 + x \leqslant 2$ et donc $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant \ln(2)$, qui est lui-même inférieur à 1. Ainsi, pour tout entier naturel n et tout $x \in [0;1]$, $x^n\ln(1+x) \leqslant x^n$
   (b) En intégrant cette dernière inégalité entre 0 et 1, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n dx$. Or,

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

   Ainsi, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) On sait que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. D'après le théorème d'encadrement, la suite (I_n) converge (ce que l'on avait déjà démontré) et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$
4. (a) Soit n un entier naturel. Pour tout $x \in [0;1]$, on pose $u(x) = \ln(1+x)$ et $v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ (on a alors $v'(x) = x^n$). Par intégration par parties, on a alors

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}\ln(1+x)}{n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

   (b) Pour tout entier naturel n,

$$nI_n = \frac{n\ln(2)}{n+1} - \frac{n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ (on peut factoriser par n ou écrire $\dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$). Par ailleurs, pour tout réel $x \in [0;1]$, $\dfrac{x^n}{2} \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant x^n$ et donc, en intégrant entre 0 et 1,

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, en utilisant le théorème d'encadrement, on trouve que cette intégrale converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx = 0$. Finalement, la suite (nI_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \ln(2)$.

■