

1 Logarithme népérien

► Exercice 1

Résoudre les équations suivantes en précisant leur domaine de résolution.

$$2 \ln(x) + 1 = 3$$

$$\ln(3x - 4) = 0$$

$$e^{3x+2} = 4$$

$$2 + 3 \ln(3x - 2) = -1$$

$$\ln(e^{3x+4}) = 5$$

$$e^{2x-3} = 3 - \pi$$

- **Correction 1 :**
- Soit $x > 0$, $2 \ln(x) + 1 = 3 \Leftrightarrow 2 \ln(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$. Ainsi, $S = \{e\}$
 - Soit $x > \frac{4}{3}$, $\ln(3x - 4) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$. Ainsi, $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$
 - Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{3x+2} = 4 \Leftrightarrow 3x + 2 = \ln(4) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(4) - 2}{3}$. Ainsi, $S = \left\{\frac{\ln(4) - 2}{3}\right\}$
 - Soit $x > \frac{2}{3}$, $2 + 3 \ln(3x - 2) = -1 \Leftrightarrow \ln(3x - 2) = -1 \Leftrightarrow 3x - 2 = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{e^{-1} + 2}{3}$.
Ainsi, $S = \left\{\frac{e^{-1} + 2}{3}\right\}$
 - Soit $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^{3x+4}) = 5 \Leftrightarrow 3x + 4 = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$
 - Puisque $3 - \pi < 0$, l'équation $e^{2x-3} = 3 - \pi$ ne possède pas de solution réelle

► Exercice 2

Résoudre les équations suivantes en précisant leur domaine de résolution.

$$(e^{2x+1} - 3)(3x - 7)(e^x + 5) = 0$$

$$(\ln(x))^2 - \ln(x) = 0$$

$$(x - 1) \ln(x - e) = 0$$

- **Correction 2 :**
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $(e^{2x+1} - 3)(3x - 7)(e^x + 5) = 0 \Leftrightarrow e^{2x+1} - 3 = 0$ ou $3x - 7 = 0$ ou $e^x + 5 = 0$
 - $e^{2x+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow e^{2x+1} = 3 \Leftrightarrow 2x + 1 = \ln(3) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(3) - 1}{2}$
 - $3x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$
 - $e^x + 5 = 0$ est impossible puisque $e^x > 0$Ainsi, $S = \left\{\frac{\ln(3) - 1}{2}, \frac{7}{3}\right\}$
 - Soit $x > 0$, $(\ln(x))^2 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x)(\ln(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0$ ou $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e$. Ainsi, $S = \{1, e\}$.
 - Soit $x > e$, $(x - 1) \ln(x - e) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $\ln(x - e) = 0$. Or,
 - $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. 1 n'est cependant pas une solution car il n'est pas dans l'ensemble

de résolution.

$$- \ln(x - e) = 0 \Leftrightarrow x - e = 1 \Leftrightarrow x = 1 + e$$

L'unique solution de cette équation est donc $1 + e$

■

► Exercice 3

En utilisant un changement de variable, résoudre l'équation $3e^{2x} + 9e^x - 30 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

■ **Correction 3 :** Pour tout réel x , on pose $X = e^x$. Ainsi,

$$3e^{2x} + 9e^x - 30 = 0 \Leftrightarrow 3X^2 + 9X - 30 = 0$$

Cette deuxième équation est une équation du second degré. Le discriminant du polynôme $3X^2 + 9X - 30$ vaut 441 qui est strictement positif. Ce polynôme a donc deux racines qui sont 2 et -5 .

On a donc $X = 2$ ou $X = -5$, c'est-à-dire $e^x = 2$ (et donc $x = \ln(2)$) ou $e^x = -5$ ce qui est impossible.

L'unique solution de l'équation est donc $\ln(2)$.

■

► Exercice 4

Pour tout réel x , on pose $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Cette quantité est appelée cosinus hyperbolique de x .

1. Justifier que ch est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x , $ch''(x) = ch(x)$
2. Pour tout réel $x \geq 1$, on pose $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
 - (a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $ch \circ f(x) = x$
 - (b) On admet que pour tout réel x , $ch(x) \geq 1$. Montrer que $f \circ ch(x) = x$.

■ **Correction 4 :** ch est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x ,

$$ch'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et

$$ch''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x)$$

Pour tout $x \geq 1$,

$$ch \circ f(x) = \frac{e^{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})} + e^{-\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}}{2} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}}{2}$$

Ainsi

$$ch \circ f(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2 + 1}{2(x + \sqrt{x^2 - 1})} = \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2 - 1} + x^2 - 1 + 1}{2(x + \sqrt{x^2 - 1})} = \frac{2x(x + \sqrt{x^2 - 1})}{2(x + \sqrt{x^2 - 1})} = x$$

Par ailleurs, pour tout réel x ,

$$f \circ ch(x) = \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - 1} \right) = \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - 1} \right)$$

Or,

$$\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - 1 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2$$

Ainsi,

$$f \circ ch(x) = \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2} \right)$$

Si $x \geq 1$, alors en particulier $x \geq 0$ et $e^x - e^{-x} \geq 0$ et donc $\sqrt{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Ainsi,

$$f \circ ch(x) = \ln \left(\frac{2e^x}{2} \right) = x$$

■

2 Propriétés algébriques

► Exercice 5

Simplifier les écritures suivantes

$$\ln(3) + \ln(4) - \ln(6)$$

$$4 \ln(3) - \ln(9) + 2 \ln(27)$$

$$\frac{\ln(9)}{\ln(3)} - \ln(1)$$

$$\ln(3x^2) - \ln(3) \text{ avec } x > 0$$

■ **Correction 5 :** • $\ln(3) + \ln(4) - \ln(6) = \ln\left(\frac{3 \times 4}{6}\right) = \ln(2)$

• $\frac{\ln(9)}{\ln(3)} - \ln(1) = \frac{\ln(3^2)}{\ln(3)} - 0 = \frac{2 \ln(3)}{\ln(3)} = 2$

• $4 \ln(3) - \ln(9) + 2 \ln(27) = 4 \ln(3) - \ln(3^2) + 2 \ln(3^3) = 4 \ln(3) - 2 \ln(3) + 6 \ln(3) = 8 \ln(3).$

• $\ln(3x^2) - \ln(3) = \ln(3) + \ln(x^2) - \ln(3) = \ln(x^2) = 2 \ln(x) \text{ car } x > 0$

■

► Exercice 6

Résoudre l'équation $\ln(4x^2) + 6 \ln(x) - 3 = 0$, d'inconnue $x > 0$

■ **Correction 6 :** Pour tout $x > 0$

$$\ln(4x^2) + 6 \ln(x) - 3 = \ln(4) + \ln(x^2) + 6 \ln(x) - 3 = 8 \ln(x) + \ln(4) - 3$$

Ainsi

$$\ln(4x^2) + 6 \ln(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow 8 \ln(x) + \ln(4) - 3 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3 - \ln(4)}{8} \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{3 - \ln(4)}{8}\right)$$

■

► Exercice 7

Montrer que pour tout réel $x > 1$, $\ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 2x + 1) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$

■ **Correction 7 :** Pour tout réel $x > 1$, les quantités $x^2 - 1$, $x^2 + x + 1$ et $\frac{x-1}{x+1}$ sont strictement positives, et

$$\begin{aligned} \ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 2x + 1) &= \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

■

► **Exercice 8**

Que vaut $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{49}{50}\right)$?

■ **Correction 8 :** $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{49}{50}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{49}{50}\right)$.

Après simplification, il reste donc

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{49}{50}\right) = \ln\left(\frac{1}{50}\right)$$

■

► **Exercice 9**

Montrer que pour tout réel x , $\ln(1 + e^{-x}) = \ln(1 + e^x) - x$.

■ **Correction 9 :** Pour tout réel x , en factorisant dans le $\ln$ par e^{-x} , on a

$$\ln(1 + e^{-x}) = \ln\left(e^{-x} \times \left(\frac{1}{e^{-x}} + 1\right)\right) = \ln(e^{-x}) + \ln\left(\frac{1}{e^{-x}} + 1\right) = -x + \ln(1 + e^x)$$

■

► **Exercice 10**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = e^3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n , $e^2 \leq u_n$
2. En déduire que (u_n) converge. Quelle est sa limite ?
3. Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = \ln(u_n) - 2$
 - (a) Exprimer u_n en fonction de a_n pour tout entier naturel n .
 - (b) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n pour tout entier naturel n .
 - (c) Quelle est la nature de la suite (a_n) ? On précisera sa raison et son premier terme.
 - (d) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = \exp\left(2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$
 - (e) Retrouver la limite de la suite (u_n) à l'aide de cette expression.

■ **Correction 10 :** 1. Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $P(n)$: « $e^2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ »

- Initialisation : On a $u_0 = e^3$ et $u_1 = e \times \sqrt{e^3} = e^{5/2}$. On a bien $e^2 \leq u_1 \leq e$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a alors $e^2 \leq u_{n+1} \leq u_n$. En appliquant la fonction racine carrée, qui est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on a alors $e \leq \sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n}$. On multiplie alors par e et on obtient $e \times e \leq e\sqrt{u_{n+1}} \leq e\sqrt{u_n}$ soit $e^2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$. $P(n+1)$ est donc vraie.

- Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .
- 2. Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers une limite que l'on note l . Par ailleurs, la fonction $x \mapsto e\sqrt{x}$ est continue sur $[e^2; +\infty[$. On a donc $l = e\sqrt{l}$ et donc $l = 0$ ou $l = e^2$. L'unique possibilité est alors $l = e^2$.
- 3. (a) Pour tout entier naturel n , $a_n = \ln(u_n) - 2$ d'où $\ln(u_n) = a_n + 2$ et $u_n = e^{a_n+2}$
 (b) Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - 2 \\ &= \ln(e\sqrt{u_n}) - 2 \\ &= \ln(e) + \ln(\sqrt{u_n}) - 2 \\ &= 1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) - 2 \\ &= \frac{1}{2} (\ln(u_n) - 2) \\ &= \frac{1}{2} a_n \end{aligned}$$
- (c) La suite (a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $a_0 = \ln(u_0) - 2 = \ln(e^3) - 2 = 3 - 2 = 1$.
- (d) Ainsi, pour tout entier naturel n , $a_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = \exp(a_n+2) = \exp\left(2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$
- (e) Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, il en vient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\right) = 2$.
 La fonction exponentielle étant continue en 2, il en vient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$

■

3 Limites avec le logarithme

► Exercice 11

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 - x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + x}\right)$

■ **Correction 11 :** • Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x) = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 - x) = +\infty$.

- Pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + x} = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$. La fonction $\ln$ étant continue en 1, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + x}\right) = \ln(1) = 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2x + 3) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) = 0^+$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + x}\right) = +\infty$.

■

► Exercice 12

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 \ln(x))$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 \ln(x))$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x))$

■ **Correction 12 :** • $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 \ln(x)) = +\infty$.

- Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 \ln(x)) = 0$

- Pour tout $x > 1$, $x - \ln(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$. Or, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x)) = +\infty$.

■

► Exercice 13

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x - x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln(x))$

■ **Correction 13 :** • $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = +\infty$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x - x) = +\infty$.

- Pour tout $x > 0$, $e^x - x = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$. Or, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - x) = +\infty$.

- Pour tout réel $x > 0$, $e^x - \ln(x) = e^x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{e^x}\right)$. Or, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln(x)) = +\infty$.

■

4 Études de fonctions avec un logarithme

► Exercice 14

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = -\frac{\ln(x)}{x^2}$.
2. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$. On y inclura les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et vers $+\infty$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$.
4. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal.
5. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ possède une unique solution sur $[1; +\infty[$. Donner une valeur approchée de cette solution à 10^{-2} près.
6. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer, selon la valeur du réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

■ **Correction 14 :** Pour tout réel $x > 0$, on pose $u(x) = 1 + \ln(x)$ et $v(x) = x$. u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$ et v ne s'y annule pas. Ainsi, f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

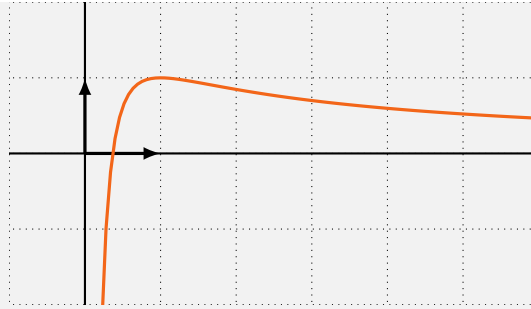
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln(x)) \times 1}{x^2} = -\frac{\ln(x)}{x^2}$$

Pour tout réel $x > 0$, on a $x^2 > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $-\ln(x)$. Or, $-\ln(x) \leq 0$ si et seulement si $x \geq 1$. On obtient ainsi le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	1	0

Soit $x > 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \ln(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$



La fonction f est continue sur $[1; +\infty[$. De plus, $f(1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c dans $[1; +\infty[$ tel que $f(c) = \frac{1}{2}$. De plus, la fonction f étant strictement décroissante sur $[1; +\infty[$, ce réel est unique. A l'aide de la calculatrice, on trouve $x \simeq 5,36$.

Si $m \leq 0$, l'équation $f(x) = m$ possède une unique solution sur $]0; +\infty[$.

Si $0 < m < 1$, cette équation possède deux solutions. Si $m = 1$, il n'y a qu'une solution. Enfin, si $m > 1$, l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution.

■

► Exercice 15

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = (\ln(x))^2$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal. Attention, $(\ln(x))^2 \neq \ln(x^2)$!

1. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$. On y inclura les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et vers $+\infty$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 1$ sur $]0; +\infty[$.
3. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal.
4. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer, selon la valeur du réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

■ **Correction 15 :** f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

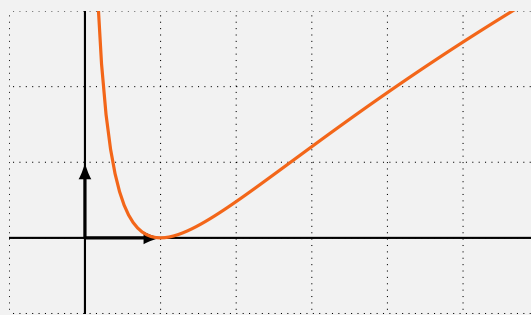
$$f'(x) = 2 \times \ln(x) \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln(x)}{x}$$

qui est du signe de $\ln(x)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	0	$+\infty$

Soit $x > 0$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow (\ln(x))^2 = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \text{ OU } \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e \text{ OU } x = \frac{1}{e}$$



Si $m < 0$, l'équation $f(x) = m$ n'admet aucune solution sur $]0; +\infty[$. Si $m = 0$, cette équation possède une unique solution. Si $m > 1$, il y a deux solutions.

■

► Exercice 16

Pour tout réel x , on pose $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée f' .
3. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ en incluant les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f .

■ **Correction 16 :** Le discriminant du polynôme $x^2 - 2x + 3$ vaut -8 qui est négatif. Ainsi, pour tout réel x , $x^2 - 2x + 3 > 0$. f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^2 - 2x + 3$ est strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3}$.

Puisque pour tout réel x , $x^2 - 2x + 3 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2x - 2$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f	$+\infty$	0	$+\infty$

■

► Exercice 17

Faire l'étude complète de la fonction $x \mapsto \ln(e^x - x)$ sur $\mathbb{R}$ puis tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthogonal.

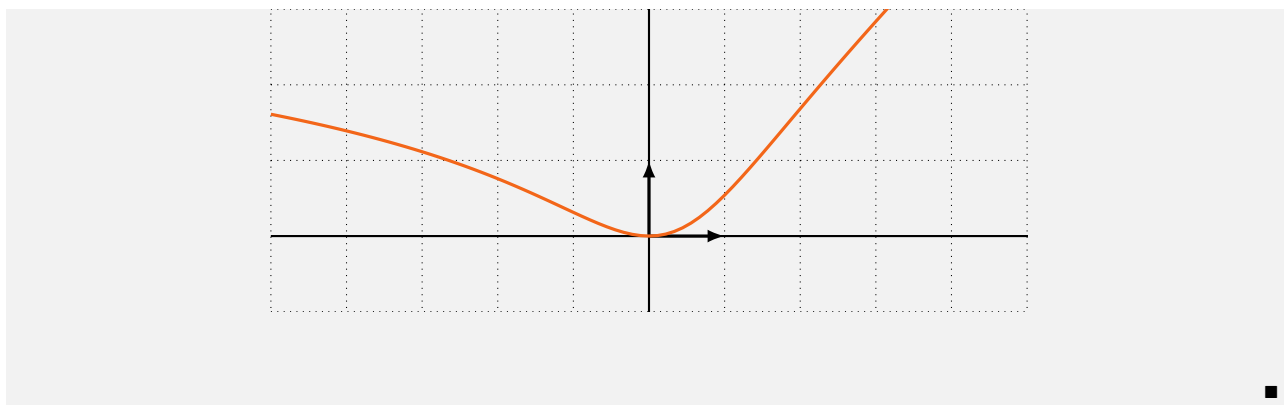
■ **Correction 17 :** Pour tout réel x , on pose $u(x) = e^x - x$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $u'(x) = e^x - 1$. On en déduit le tableau de variations de u

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$		$-$	$+$
u	$+\infty$	1	$+\infty$

En particulier, pour tout réel x , $e^x - x \geq 1$ et donc $e^x - x > 0$. f est donc définie sur $\mathbb{R}$. f est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$. Les variations de f sont les mêmes que les variations de u . On a donc le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f	$+\infty$	0	$+\infty$

On peut alors tracer l'allure de la courbe de f .



► Exercice 18

Pour tout réel x , on pose $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Cette fonction, utilisée en intelligence artificielle, est appelée fonction SoftPlus.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée f' .
3. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ en incluant les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f .
4. Pour tout réel x , on pose $g(x) = f(x) - x$
 - (a) Montrer que pour tout réel x , $g(x) = \ln(1 + e^{-x})$
 - (b) En déduire que pour tout réel x , $f(x) \geq x$
 - (c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat
5. Construire l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

- **Correction 18 :**
1. Pour tout réel x , $e^x > 0$ et donc $1 + e^x > 0$. f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.
 2. f est dérivable comme composition de fonctions dérivables. Pour tout réel x , $f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$
 3. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x) = 1$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln(1) = 0$. On obtient alors le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$+\infty$	$+\infty$

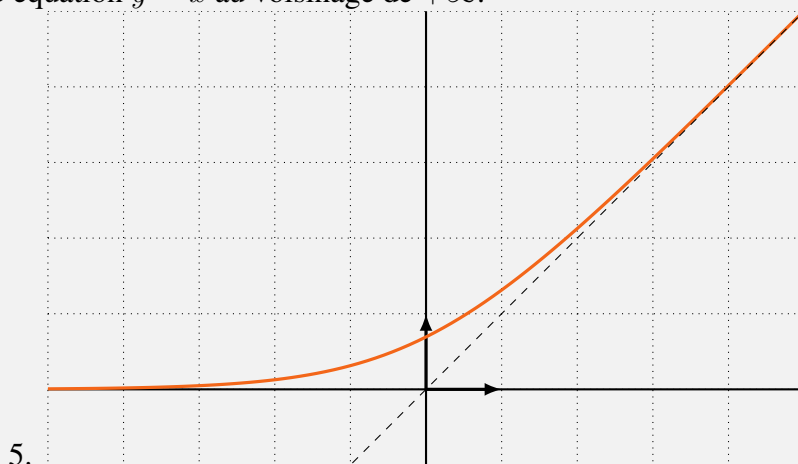
4. (a) Pour tout réel x ,

$$g(x) = f(x) - x = \ln(1 + e^x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1 + e^x}{e^x}\right) = \ln(e^{-x} + 1).$$

- (b) Pour tout réel x , $1 + e^{-x} > 1$ et donc $\ln(1 + e^{-x}) > 0$, par croissance du logarithme

népérien sur $[1; +\infty[$. Il en vient que pour tout réel x , $g(x) > 0$, soit $f(x) - x > 0$ et donc $f(x) > x$.

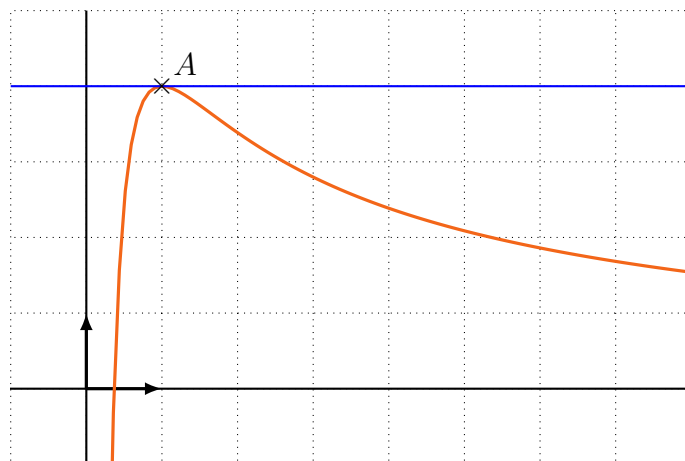
- (c) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x}) = 1$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. La courbe de f se rapproche de la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.



■

► Exercice 19

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe C_f représentative d'une fonction f , deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. La courbe C_f admet une tangente horizontale T au point $A(1; 4)$.



1. Préciser les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a + b \ln(x)}{x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des réels fixés.}$$

1. Démontrer que pour tout réel x strictement positif, on a

$$f'(x) = \frac{b - a - b \ln(x)}{x^2}$$

2. En déduire les valeurs de a et de b

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln(x)}{x}$$

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Déterminer le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$.

■ **Correction 19 :** 1. D'après le graphique, on a $f(1) = 4$ et $f'(1) = 0$.
2. Pour tout réel x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - (a + b \ln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{b - a - b \ln(x)}{x^2}$$

3. D'une part, $f(1) = 4$ d'après le graphique. Or, en utilisant la formule, on a $f(1) = \frac{a + b \ln(1)}{1} = a$. Ainsi, $a = 4$. Par ailleurs, $f'(1) = 0$ d'après le graphique, et $f'(1) = \frac{b - 4 - b \ln(1)}{1^2} = b - 4$ en utilisant la formule. Il en vient que $b - 4 = 0$ et donc $b = 4$.
4. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} (4 + 4 \ln(x)) = -\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) = -\infty$. Par ailleurs, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{4 \ln(x)}{x}$. Par croissances comparées et somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = 0$.
5. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{-4 \ln(x)}{x^2}$ est du signe opposé à celui de $\ln(x)$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$+\infty$	4	0

■

5 Logarithme et inéquations

► Exercice 20

Résoudre les inéquations suivantes. On précisera bien les domaines de résolution. $\ln(5x - 3) \geq 0$

- **Correction 20 :**
1. Soit $x > \frac{5}{3}$. Alors $\ln(5x - 3) \geq 0$ si et seulement si $5x - 3 \geq 1$ soit $x \geq \frac{4}{5}$. $S = \left[\frac{4}{5} + \infty\right[$.
 2. Soit $x > \frac{2}{9}$. Alors $\ln(9x - 2) < 0$ si et seulement si $9x - 2 < 1$ soit $x < \frac{1}{3}$. Ainsi, $S = \left]\frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right[$.
 3. Soit $x \in \left]-\frac{1}{3}; 3\right[$. Alors $\ln(3x + 1) \geq \ln(3 - x)$ si et seulement si $3x + 1 \geq 3 - x$ soit $x \geq \frac{1}{2}$.
Finalement, $S = \left[\frac{1}{2}; 3\right[$.

► Exercice 21

Résoudre l'inéquation $(e^{2x} - 3)(\ln(x) - 1) < 0$ sur $\mathbb{R}$. On précisera le domaine de définition de cette expression.

- **Correction 21 :** L'expression $(e^{2x} - 3)(\ln(x) - 1)$ existe pour tout réel $x > 0$. Construisons le tableau de signe de cette expression.

x	0	$\ln(3)/2$	e	$+\infty$	
$e^{2x} - 3$	−	0	+	+	
$\ln(x) - 1$	−	−	0	+	
$(e^{2x} - 3)(\ln(x) - 1)$	+	0	−	0	+

Ainsi, l'ensemble solution recherché est $S = \left]0; \frac{\ln(3)}{2}\right[\cup]e; +\infty[$.

► Exercice 22

A l'aide du logarithme, déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant les conditions suivantes

$$2^n \geq 40000 \qquad 1.01^n \geq 2 \qquad 0.7^n \leq 10^{-3}$$

- **Correction 22 :**
- Par croissance du logarithme népérien sur $]0; +\infty[$, $2^n \geq 40000$ si et seulement si $\ln(2^n) \geq \ln(40000)$ soit $n \ln(2) \geq \ln(40000)$ et, $\ln(2)$ étant positif, $n \geq \frac{\ln(40000)}{\ln(2)}$. L'entier recherché est 16.
 - Par croissance du logarithme népérien sur $]0; +\infty[$, $1.01^n \geq 2$ si et seulement si $\ln(1.01^n) \geq \ln(2)$ soit $n \ln(1.01) \geq \ln(2)$ et, $\ln(1.01)$ étant positif, $n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1.01)}$. L'entier recherché est 70.
 - Par croissance du logarithme népérien sur $]0; +\infty[$, $0.7^n \leq 10^{-3}$ si et seulement si $\ln(0.7^n) \leq \ln(10^{-3})$ soit $n \ln(0.7) \leq -3 \ln(10)$ et, $\ln(0.7)$ étant négatif, $n \geq \frac{-3 \ln(10)}{\ln(0.7)}$. L'entier recherché est 20.

► Exercice 23

A l'aide du logarithme, déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant les conditions suivantes

$$121 \times 0.97^{2n+1} \leq 1 \qquad 3 \times 1.1^n - 150 \geq 365 \qquad 10^{12} \times 2^{-n} \leq 0.1$$

- **Correction 23 :**
- $121 \times 0.97^{2n+1} \leq 1$ si et seulement si $0.97^{2n+1} \leq \frac{1}{121}$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0; +\infty[$, ceci équivaut à $(2n+1) \ln(0.97) \leq -\ln(121)$. En divisant par $\ln(0.97)$ qui est négatif, on obtient $2n+1 \geq -\frac{\ln(121)}{\ln(0.97)}$ et donc $n \geq \frac{1}{2} \left(-\frac{\ln(121)}{\ln(0.97)} - 1 \right)$. L'entier recherché est 79.
 - $3 \times 1.1^n - 150 \geq 365$ si et seulement si $1.1^n \geq \frac{515}{3}$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0; +\infty[$, ceci équivaut à $n \ln(1.1) \geq \ln(515) - \ln(3)$ et donc $n \geq \frac{\ln(515) - \ln(3)}{\ln(1.1)}$. L'entier recherché est 54.
 - $10^{12} \times 2^{-n} \leq 0.1$ équivaut à $2^{-n} \leq 10^{-13}$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0; +\infty[$, ceci équivaut à $-n \ln(2) \leq -13 \ln(10)$ et donc $n \geq \frac{13 \ln(10)}{\ln(2)}$. L'entier recherché est 44.

► Exercice 24

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{7}{8}u_n + 1$. Pour tout entier naturel n , on pose alors $a_n = u_n - 8$.

1. Montrer que la suite (a_n) est géométrique de raison $\frac{7}{8}$ et déterminer son premier terme.
2. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 8 - 3 \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$?
3. Déterminer le plus petit entier n à partir duquel $u_n \geq 7,999$.

■ **Correction 24 :** 1. Pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = u_{n+1} - 8 = \frac{7}{8}u_n + 1 - 8 = \frac{7}{8}(a_n + 8) - 7 = \frac{7}{8}a_n$$

La suite (a_n) est donc géométrique, de raison $\frac{7}{8}$ et de premier terme $a_0 = u_0 - 8 = -3$

2. Ainsi, pour tout entier naturel n , $a_n = -3 \left(\frac{7}{8}\right)^n$ et $u_n = a_n + 8 = 8 - 3 \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$

3. Soit n un entier naturel. On a $u_n \geq 7,999$ si et seulement si $8 - 3 \times \left(\frac{7}{8}\right)^n \geq 7,999$, ce qui

équivalait à $\left(\frac{7}{8}\right)^n \leq \frac{0.001}{3}$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0; +\infty[$, ceci équivalait

à $n \ln\left(\frac{7}{8}\right) \leq \ln\left(\frac{0.001}{3}\right)$ et donc, en divisant par $\ln\left(\frac{7}{8}\right)$ qui est négatif, $n \geq \frac{\ln\left(\frac{0.001}{3}\right)}{\ln\left(\frac{7}{8}\right)}$.

L'entier recherché est 60.

■

► Exercice 25

La population d'une ville augmente de 3% chaque année. Après combien d'année cette population aura-t-elle doublé ?

■ **Correction 25 :** Soit n un entier naturel. Après n années, la population de cette ville a été multipliée par 1.03^n . On cherche donc à résoudre l'équation $1.03^n \geq 2$, ce qui équivalait à $n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1.03)}$. L'entier recherché est 24 : la population aura doublé en 24 ans.

■