1. Cours : Suites et récurrence

1 Démonstration par récurrence

Exemple introductif, tiré de l'épreuve de spécialité de Polynésie 2022 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

A l'aide de cette expression, il est possible de calculer les termes de la suite de proche en proche.

- $u_1 = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.
- $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}$.
- $u_3 = \dfrac{u_2}{1+u_2} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{4}$.
- $\ldots$

Toutefois, il n'est pas possible de calculer u_{50} sans calculer tous les termes précédents... On souhaiterait déterminer une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

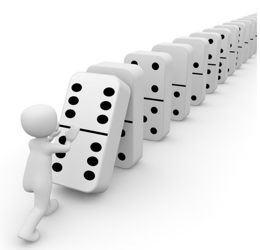
D'après les premiers termes de notre suite, il semblerait que pour tout entier naturel n, on ait $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Cette formule fonctionne pour les rangs 0, 1, 2 et 3 mais qu'en est-il pour le reste ?

Un moyen de s'assurer que cette formule fonctionne pour tous les rangs est de la démontrer par récurrence.

Définition 1 : Lorsque l'on souhaite démontrer une proposition mathématique qui dépend d'un entier n, il est parfois possible de démontrer cette proposition par récurrence.

Pour tout entier n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition qui nous intéresse. La démonstration par récurrence comporte trois étapes :

- **Initialisation** : On montre qu'il existe un entier n_0 pour lequel $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie ;
- **Hérédité** : on montre que, si pour un entier $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est également ;
- **Conclusion** : on en conclut que pour tout entier $n \geqslant n_0$, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie.



Le principe du raisonnement par récurrence rappelle les dominos que l'on aligne et que l'on fait tomber, les uns à la suite des autres.

On positionne les dominos de telle sorte que, dès que l'un tombe, peu importe lequel, il entraîne le suivant dans sa chute. C'est **l'hérédité**. Seulement, encore faut-il faire effectivement tomber le premier domino, sans quoi rien ne se passe : c'est **l'initialisation**.

Si ces deux conditions sont remplies, on est certain qu'à la fin, tous les dominos seront tombés : c'est notre **conclusion**.

■ **Exemple 1 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n = \frac{1}{n+1}$ ».

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a
$$\frac{1}{0+1} = \frac{1}{1} = 1 = u_0.$$
La propriété $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n = \frac{1}{n+1}$. A partir de ce résultat, on souhaite démontrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = \frac{1}{n+1+1} = \frac{1}{n+2}$.
Nous avons donc $u_n = \frac{1}{n+1}$. Or, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. Ainsi,
$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+\frac{n+1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$
On trouve bien que $u_{n+1} = \frac{1}{n+1+1}$: $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

Nous avons montré que pour tout entier naturel n, on a bien $u_n = \frac{1}{n+1}$. ■

Une propriété utile qui peut être démontrée par récurrence est la suivante. Souvenez-vous en, elle reviendra dans un prochain chapitre !

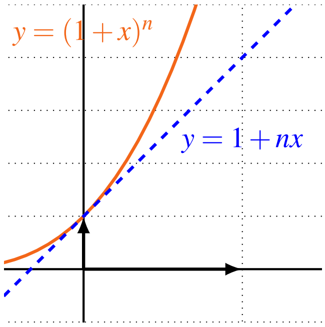
Propriété 1 — Inégalité de Bernoulli : Soit a un réel strictement positif.
Pour tout entier naturel n, on a $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Démonstration 1 : Nous allons démontrer cette propriété par récurrence. Fixons-nous un réel a strictement positif. Pour tout entier naturel n, on note alors $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $(1+a)^n \geqslant 1+na$ ».

- **Initialisation** : Prenons $n = 0$.
  - D'une part, $(1+a)^0 = 1$.
  - D'autre part, $1+0 \times a = 1$.

  On a bien $(1+a)^0 \geqslant 1+0\times a$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
En multipliant des deux côtés de l'inégalité par $(1+a)$, qui est strictement positif, on obtient alors que
$$(1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a).$$
Or,
$$(1+na)(1+a) = 1+na+a+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \geqslant 1+(n+1)a.$$
Ainsi, $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $\mathscr{P}(0)$ est vraie et, si pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, $\mathscr{P}(n+1)$l'est aussi. Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

On a bien montré que, pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1+na$. □



Une interprétation graphique de cette inégalité est possible.
La droite d'équation $y=1+nx$ n'est autre que la tangente à la courbe d'équation $y=(1+x)^n$ à l'abscisse 0. L'inégalité de Bernoulli dit donc que la courbe se trouve au-dessus de la tangente lorsque $x>0$.

Nous verrons, lorsque la dérivation n'aura plus de secret pour vous, que cette remarque nous fournira une autre démonstration de l'inégalité de Bernoulli.

2 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 2 — Suites majorées, minorées, bornées : Soit (u_n) une suite réelle. On dit que...

- ...(u_n) est *majorée* s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
  Un tel réel M est alors appelé *majorant* de la suite (u_n).
- ...(u_n) est *minorée* s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.
  Un tel réel m est alors appelé *minorant* de la suite (u_n).
- ...(u_n) est *bornée* si (u_n) est à la fois majorée et minorée.

Les majorants et minorants sont indépendants de n ! Bien que pour tout $n>0$, on ait $n \leqslant n^2$, on ne peut pas dire que la suite (u_n) définie par $u_n = n$ est majorée. Cette indépendance se traduit dans l'ordre des quantificateurs employés dans la définition précédente (le majorant y apparaît avant l'entier n).

■ **Exemple 2 :** Pour tout n, on pose $u_n = \cos(n)$.

La suite (u_n) est bornée puisque, pour tout entier n, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$. ■

■ **Exemple 3 :** Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = n^2+1$. La suite (v_n) est minorée puisque pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$. En revanche, elle n'est pas majorée. ■

■ **Exemple 4 :** Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = (-1)^n n$. Cette suite n'est ni majorée, ni minorée. ■

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, une majoration ou une minoration de cette suite peut elle-même être démontrée par récurrence.

■ **Exemple 5 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0.5u_n + 2$. Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n \geqslant 4$ ».

- **Initialisation** : On a bien $u_0 \geqslant 4$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \geqslant 4$.
  En multipliant cette inégalité par 0,5, on en déduit que $0{,}5u_n \geqslant 2$.
  En ajoutant 2, on en déduit que $0{,}5u_n + 2 \geqslant 4$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 4$.
  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}$ est héréditaire.
  D'après le principe de récurrence, on en conclut que pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

■

Si l'on se donne une fonction f définie sur un ensemble I et une suite (u_n) à valeurs dans I telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, l'étude de la fonction f pourra également nous fournir des informations sur la suite (u_n) étudiée.

■ **Exemple 6 :** On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dont le tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f		$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	

On considère alors la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ ».

- **Initialisation** : On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
  La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-1;3]$, lequel contient l'intervalle $[0;3]$. Il est alors possible d'appliquer cette fonction à notre inégalité (attention, la fonction étant décroissante, l'inégalité sera alors renversée).
  Ainsi, on a $f(0) \geqslant f(u_n) \geqslant f(3)$. On sait par ailleurs que $f(u_n) = u_{n+1}$ et que $f(3) = 0$.
  Enfin, d'après les variations de f, on sait également que $f(-1) \geqslant f(0)$, c'est-à-dire que $3 \geqslant f(0)$.
  Ainsi, $3 \geqslant f(0) \geqslant f(u_n) \geqslant f(3)$, c'est-à-dire $3 \geqslant f(0) \geqslant u_{n+1} \geqslant 0$.
  On en conclut en particulier que $3 \geqslant u_{n+1} \geqslant 0$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}$ est héréditaire. D'après le principe de récurrence, on en conclut que pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

■

3 Suites croissantes, suites décroissantes

Définition 3 — Variations d'une suite : Soit (u_n) une suite réelle et n_0 un entier naturel.

- On dit que (u_n) est *croissante* à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- On dit que (u_n) est *décroissante* à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Étudier la croissance ou la décroissance d'une suite revient donc souvent à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

■ **Exemple 7 :** On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - n$.

Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 - 1 = 2n \geqslant 0.$$

La suite (u_n) est donc croissante. ■

Propriété 2 : Soit (u_n) une suite **strictement positive** et n_0 un entier naturel.

- (u_n) est croissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
- (u_n) est décroissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

■ **Exemple 8 :** On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1}.$$

Or, si $n \geqslant 1$, on a, en ajoutant n aux deux membres de l'inégalité, $2n \geqslant n+1$ et donc $\dfrac{2n}{n+1} \geqslant 1$.

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$. La suite (u_n) est donc croissante. ■

Encore une fois, lorsqu'une suite est définie par récurrence, ses variations peuvent également être étudiées par récurrence.

■ **Exemple 9 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{5 + u_n}$.

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. Montrer que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n démontrera que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, un résultat qui nous intéressera fortement dans un prochain chapitre...

- **Initialisation :** $u_0 = 4$, $u_1 = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$. On a bien $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a alors

  $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

  En ajoutant 5 à chaque membre, on obtient

  $$5 \leqslant u_{n+1} + 5 \leqslant u_n + 5.$$

  On souhaite "appliquer la racine carrée" à cette inégalité. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$, l'appliquer ne changera pas le sens de l'inégalité. On a donc bien

  $$\sqrt{5} \leqslant \sqrt{u_{n+1} + 5} \leqslant \sqrt{u_n + 5}.$$

  D'une part, $\sqrt{5} \geqslant 0$. D'autre part, $\sqrt{u_{n+1} + 5} = u_{n+2}$ et $\sqrt{u_n + 5} = u_{n+1}$. Ainsi,

  $$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}.$$

  La proposition $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■

Comme précédemment, si l'on dispose d'une fonction f que l'on sait étudier et d'une suite (u_n) telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, il est sans doute possible d'utiliser les informations que nous avons sur la fonction pour en déduire des informations sur notre suite.

Attention ! Ce n'est pas parce que la fonction f est croissante que la suite le sera également !

■ **Exemple 10 :** On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dont le tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		-1		3		5		$+\infty$
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	

On considère alors la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On souhaite montrer que la suite (u_n) est décroissante et bornée par -1 et 5. Pour tout entier naturel n, on considère alors la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$ ».

- **Initialisation** : On a $u_0 = 3$ et $u_1 = f(u_0) = f(3) = 2$. On a bien $-1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 5$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$.
  La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1;5]$. Il est alors possible d'appliquer cette fonction à notre inégalité (la fonction étant croissante, le sens de l'inégalité est conservée).
  Ainsi, on a $f(-1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(5)$.
  On sait par ailleurs que $f(u_n) = u_{n+1}$, que $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, que $f(5) = 5$ et enfin que $f(-1) = 1 \geqslant -1$.
  On en conclut donc que $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}$ est héréditaire. D'après le principe de récurrence, on en conclut que pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

■

2. Exercices : Suites et récurrence

Principe

► Exercice 1 – Voir le corrigé

Soit r un réel. On rappelle qu'une suite (u_n) est arithmétique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Soit donc (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 + rn$.
2. **Application :** On considère la suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 8$.
   (a) Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (b) Calculer u_{18} à l'aide de cette formule.

► Exercice 2 – Voir le corrigé

Soit q un réel. On rappelle qu'une suite (u_n) est géométrique de raison q si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Soit donc (u_n) une suite géométrique de raison q.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.
2. **Application :** On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = -2$.
   (a) Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (b) Calculer u_{12} à l'aide de cette formule.

► Exercice 3 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 8$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 4 + 8 \times 3^n$.

► Exercice 4 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}.$$

1. Calculer u_2 et u_3
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

► Exercice 5 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n + 5}$.

Montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$u_n = \frac{9 - 8n}{3 + 8n}.$$

► Exercice 6 – Voir le corrigé

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, on a

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel non nul et

$$u_n = 1+3+5+7+\cdots+(2n-1).$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Conjecturer une expression simple de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture par récurrence.

► Exercice 8 – Voir le corrigé

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies comme suit.

$$\begin{cases} x_0 = -4 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\, x_{n+1} = 0.8x_n - 0.6y_n \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0 = 3 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\, y_{n+1} = 0.6x_n + 0.8y_n \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $x_n^2 + y_n^2 = 25$. Interpréter géométriquement cette propriété.

► Exercice 9 (Suites arithmético-géométriques) – Voir le corrigé

Soit a et b deux réels, avec a différent de 0 et 1. On considère une suite (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = a\,u_n + b.$$

1. Résoudre l'équation $x = ax + b$, d'inconnue réelle x. On note r la solution de cette équation.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = a^n(u_0 - r) + r.$$

3. On propose de montrer ce résultat par une autre méthode. On considère pour cela la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par $c_n = u_n - r$.
   (a) Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n pour tout entier naturel n.
   (b) Quelle est la nature de la suite (c_n) ?
   (c) En déduire une expression de c_n puis de u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

► Exercice 10 – Voir le corrigé

On rappelle que pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$, définie sur $\mathbb{R}$, est dérivable, de dérivée $f_n' : x \mapsto n x^{n-1}$. Nous allons le démontrer par récurrence.

1. Montrer, à l'aide du taux de variation, que les fonctions $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto x^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donner leur fonctions dérivées.
2. Soit u et v deux fonctions dérivables. Rappeler la formule de la dérivée de uv.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathscr{P}(n)$ la proposition « f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_n'(x) = n x^{n-1}$ ». Démontrer cette proposition par récurrence.

Suites majorées, minorées, bornées

► Exercice 11 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite (u_n) est majorée, minorée, bornée.

a. $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ pour $n \neq 0$ **b.** $u_n = \cos(n) + \sin(n)$ **c.** $u_n = -3\cos(n) + 2\sin(n)$

d. $u_n = 2\cos(n) - n$ **e.** $u_n = \cos(n) + 3$ **f.** $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

► Exercice 12 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 8$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 10$.

► Exercice 13 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $3 \leqslant u_n \leqslant 5$.

► Exercice 14 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier relatif n, $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0.3$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 4v_n - 4v_n^2$.

1. Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $f(x) = 4x - 4x^2$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $f'(x)$ pour tout réel $x \in [0;1]$.
2. Étudier le signe de f' sur l'intervalle $[0;1]$.
3. En déduire les variations de f et en déduire que pour tout réel x, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant v_n \leqslant 1$.

Suites croissantes, suites décroissantes

► Exercice 16 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 - 24n + 3$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 4n - 22$.
2. En déduire le sens de variations de la suite (u_n).

► Exercice 17 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 8$.
2. Montrer que pour entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 4$.
3. Déduire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est croissante.

► Exercice 18 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

► Exercice 19 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 7$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant -21$ et que la suite (u_n) est décroissante.

► Exercice 20 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$ et que (u_n) est décroissante.

► Exercice 21 (Métropole 2021) – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que la fonction f définie pour tout réel $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

► Exercice 22 (Centres étrangers 2022) – Voir le corrigé

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = \dfrac{1}{10}$, $b_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} = \mathrm{e}^{-a_n} \end{cases}$$

On rappelle que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1.$$

3. Correction des exercices

Principe

► Correction 1 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $u_n = u_0 + rn$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a bien $u_0 + r \times 0 = u_0$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = u_0 + rn$. Or, $u_{n+1} = u_n + r$. Ainsi, $u_{n+1} = u_0 + rn + r = u_0 + r(n+1)$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

D'après la question 1, , pour tout entier naturel n, on a $u_n = 4 + 8n$. Ainsi, $u_{18} = 4 + 8 \times 18 = 144$.

► Correction 2 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $u_n = u_0 \times q^n$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \times q^0 = u_0 \times 1 = u_0$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = u_0 \times q^n$. Or, $u_{n+1} = q\,u_n$. Ainsi, $u_{n+1} = q \times u_0 \times q^n = u_0 \times q^{n+1}$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

D'après la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times (-2)^n$. Ainsi, $u_{12} = 3 \times (-2)^{12} = 12288$.

► Correction 3 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $u_n = 4 + 8 \times 3^n$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a bien $4 + 8 \times 3^0 = 4 + 8 \times 1 = 12 = u_0$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = 4 + 8 \times 3^n$. Or, $u_{n+1} = 3u_n - 8$. Ainsi, $u_{n+1} = 3(4 + 8 \times 3^n) - 8 = 3 \times 4 + 3 \times 8 \times 3^n - 8 = 4 + 8 \times 3^{n+1}$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

On a

- $u_2 = \dfrac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- $u_3 = \dfrac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + 1}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ».

- **Initialisation** : $\dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1 = u_1$, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.Or, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$.

Ainsi,

$$u_{n+1}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

- **Conclusion** : $\mathscr{P}(1)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n

► Correction 5 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $u_n=\dfrac{9-8n}{3+8n}$ ».

- **Initialisation** : On a $\dfrac{9-8\times 0}{3+8\times 0}=\dfrac{9}{3}=3=u_0$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n=\dfrac{9-8n}{3+8n}$. On cherche à établir

$$u_{n+1}=\frac{9-8(n+1)}{3+8(n+1)}=\frac{9-8n-8}{3+8n+8}=\frac{1-8n}{11+8n}.$$

Or, $u_{n+1}=\dfrac{u_n-2}{2u_n+5}$. Ainsi, $u_{n+1}=\dfrac{\dfrac{9-8n}{3+8n}-2}{2\times\dfrac{9-8n}{3+8n}+5}=\dfrac{\dfrac{9-8n-2(3+8n)}{3+8n}}{\dfrac{2(9-8n)+5(3+8n)}{3+8n}}$.

On a alors

$$u_{n+1}=\frac{9-8n-2(3+8n)}{3+8n}\times\frac{3+8n}{2(9-8n)+5(3+8n)}=\frac{9-8n-2(3+8n)}{2(9-8n)+5(3+8n)}.$$

et donc

$$u_{n+1}=\frac{9-8n-6-16n}{18-16n+15+40n}=\frac{3-24n}{33+24n}.$$

En factorisant par 3, on obtient finalement $u_{n+1}=\dfrac{3(1-8n)}{3(11+8n)}=\dfrac{1-8n}{11+8n}$, qui est bien le résultat voulu. $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie, $\mathscr{P}$ est héréditaire. D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 6 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ».

- D'une part, la somme de tous les entiers entre 1 et 1 vaut évidemment 1. Par ailleurs, $\dfrac{1\times(1+1)}{2}=1$. $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a alors

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

- $\mathscr{P}(1)$ est vraie, P est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

On a $u_1 = 1$, $u_2 = 1+3 = 4$, $u_3 = 1+3+5 = 9$, $u_4 = 1+3+5+7 = 16$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = n^2$ ».

- **Initialisation** : $1^2 = 1 = u_1$, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n = n^2$. Or,

  $$u_{n+1} = 1+3+5+7+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = u_n + (2n+1).$$

  Ainsi, puisque $u_n = n^2$ par hypothèse de récurrence,

  $$u_{n+1} = n^2+2n+1 = (n+1)^2.$$

  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathscr{P}(1)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $x_n^2 + y_n^2 = 25$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a bien $x_0^2 + y_0^2 = (-4)^2 + 3^2 = 16+9 = 25$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $x_n^2 + y_n^2 = 25$. Alors,

  $$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (0{,}8x_n - 0{,}6y_n)^2 + (0{,}6x_n + 0{,}8y_n)^2.$$

  En développant, on a

  $$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = 0{,}64x_n^2 - 0{,}96x_ny_n + 0{,}36y_n^2 + 0{,}36x_n^2 + 0{,}96x_ny_n + 0{,}64y_n^2.$$

  En simplifiant, on a donc

  $$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = x_n^2 + y_n^2 = 25.$$

  $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Si l'on se place dans un repère orthonormé, pour tout entier naturel n, le point de coordonnées $(x_n ; y_n)$ est sur le cercle de centre l'origine et de rayon 5.

► Correction 9 – Voir l'énoncé

On a $x = ax+b$ si et seulement si $x - ax = b$ si et seulement si $x(1-a) = b$ si et seulement si $x = \dfrac{b}{1-a}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = a^n(u_0 - r) + r$ ».

- **Initialisation** : $a^0 \times (u_0 - r) + r = u_0 - r + r = u_0$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n = a^n(u_0-r)+r$. Or,

  $$u_{n+1} = au_n + b = a \times (a^n(u_0-r)+r) + b = a^{n+1}(u_0-r) + ar + b.$$

  Or, r est solution de l'équation $x = ax+b$. Ainsi, $ar+b = r$. Il en vient que

  $$u_{n+1} = a^{n+1}(u_0-r)+r.$$

  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

- **Conclusion** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n,

$$c_{n+1} = u_{n+1} - r = au_n + b - r$$

Or, r est solution de l'équation $x = ax + b$. Ainsi,

$$c_{n+1} = au_n + b - (ar + b) = a(u_n - r) = a \times c_n.$$

La suite (c_n) est une suite géométrique de raison a.

D'après la question précédente, la suite (c_n) est une suite géométrique de raison a. Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$c_n = c_0 \times a^n = (u_0 - r) \times a^n.$$

Or, pour tout entier naturel n, $c_n = u_n - r$ et donc $u_n = c_n + r$. On en conclut que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = a^n(u_0 - r) + r.$$

► Correction 10 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x et tout réel non nul h,

$$\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Ainsi, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_1'(x) = 1$. Par ailleurs, pour tout réel x et tout réel h non nul,

$$\frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = 2x + h.$$

Ainsi, f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_2'(x) = 2x$.

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Alors uv est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(uv)' = u'v + uv'$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: « la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_n' : x \mapsto nx^{n-1}$ ».

- **Initialisation** : D'après la question 1., f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_2'(x) = 2x = 2x^{2-1}$. $\mathscr{P}(2)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Pour tout réel x

  $$f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x \times x^n = f_1(x) \times f_n(x).$$

  Or, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ (question 1.) et f_n est également dérivable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

  $$f_{n+1}' = f_1' \times f_n + f_1 \times f_n'.$$

  Pour tout réel x,

  $$f_{n+1}'(x) = 1 \times x^n + x \times nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n = (n+1)x^{n+1-1}.$$

  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathscr{P}(2)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2

Suites majorées, minorées, bornées

► Correction 11 – Voir l'énoncé

a. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$. Ainsi, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 2$. La suite (u_n) est bornée.

b. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$. Ainsi, $-2 \leqslant \cos(n)+\sin(n) \leqslant 2$. La suite (u_n) est bornée.

c. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ et donc $3 \geqslant -3\cos(n) \geqslant -3$, soit $-3 \leqslant -3\cos(n) \leqslant 3$. Par ailleurs, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ et donc $-2 \leqslant 2\sin(n) \leqslant 2$. Ainsi, $-5 \leqslant -3\cos(n)+2\sin(n) \leqslant 5$. La suite (u_n) est bornée.

d. Pour tout entier naturel n, $-2 \leqslant \cos(n) \leqslant 2$ et $-n \leqslant 0$. Ainsi, $2\cos(n)-n \leqslant 2$. La suite (u_n) est majorée. En revanche, elle n'est pas minorée.

e. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$. Ainsi, $2 \leqslant \cos(n)+4 \leqslant 4$. La suite (u_n) est bornée.

f. Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant n \leqslant n+1$ et donc $0 \leqslant \dfrac{n}{n+1} \leqslant 1$. La suite (u_n) est bornée.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $u_n \leqslant 10$ ».

- **Initialisation :** Pour $n=0$, on a $u_0 = 2$ et donc $u_0 \leqslant 10$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \leqslant 10$. Ainsi, $\dfrac{1}{5} \times 10 \leqslant \dfrac{1}{5} \times 10$ et $\dfrac{1}{5}u_n + 8 \leqslant \dfrac{1}{5} \times 10 + 8$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant 10$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $3 \leqslant u_n \leqslant 5$ ».

- **Initialisation :** Pour $n=0$, on a $u_0 = 5$ et donc $3 \leqslant u_0 \leqslant 5$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $3 \leqslant u_n \leqslant 5$.
  Ainsi, $3+3 \leqslant u_n+3 \leqslant 5+3$ et $\dfrac{3+3}{2} \leqslant \dfrac{u_n+3}{2} \leqslant \dfrac{5+3}{2}$, c'est-à-dire $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
  Or, puisque $4 \leqslant 5$, on a donc bien $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$ ».

- **Initialisation :** Pour $n=0$, on a $u_0 = 1$ et donc $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant 1$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
  Ainsi, $\dfrac{1}{2}+1 \leqslant u_n+1 \leqslant 1+1$, c'est-à-dire $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n+1 \leqslant 2$. On applique alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ à cette inégalité. Cette fonction étant décroissante sur $]0;+\infty[$, l'inégalité est alors renversée.
  On a donc $\dfrac{2}{3} \geqslant \dfrac{1}{1+u_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$. Or, $\dfrac{2}{3} \leqslant 1$. On a donc bien $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 15 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, $f'(x) = 4-8x$. On a $f'(x) > 0$ si et seulement si $4-8x > 0$ si et seulement si $x < \dfrac{1}{2}$. On construit donc le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f sur $[0;1]$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

En particulier, on voit que pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $0 \leqslant v_n \leqslant 1$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $v_0 = 0{,}3$ et donc $0 \leqslant v_n \leqslant 1$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant v_n \leqslant 1$. En utilisant les résultats de la question précédente, on a alors $0 \leqslant f(v_n) \leqslant 1$, c'est-à-dire $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant 1$. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Suites croissantes, suites décroissantes

► Correction 16 – Voir l'énoncé

Soit n un entier naturel. On a

$$u_{n+1} = 2(n+1)^2 - 24(n+1) + 3 = 2(n^2 + 2n + 1) - 24n - 24 + 3$$

et donc

$$u_{n+1} = 2n^2 + 4n + 2 - 24n - 24 + 3 = 2n^2 - 20n - 19.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n = 2n^2 - 20n - 19 - (2n^2 - 24n + 3) = 4n - 22.$$

Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$, c'est-à-dire le signe de $4n - 22$. On a $4n - 22 \geqslant 0$ si et seulement si $n \geqslant 5{,}5$. Ainsi, (u_n) est décroissante jusqu'au rang 5 puis croissante à partir du rang 6. On a par ailleurs $u_5 = -67$ et $u_6 = -69$. Ainsi, (u_n) est en fait décroissante jusqu'au rang 6 puis croissante à partir de ce rang. Une autre méthode consiste simplement à étudier les variations de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 24x + 3$.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n \leqslant 8$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et donc $u_n \leqslant 8$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \leqslant 8$.
  On a donc $\dfrac{1}{2}u_n + 4 \leqslant \dfrac{1}{2} \times 8 + 4$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant 8$. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit n un entier naturel, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}u_n + 4 - u_n = -\dfrac{1}{2}u_n + 4$.

Puisque pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 8$, on a donc $-\dfrac{1}{2}u_n \geqslant -\dfrac{1}{2} \times 8$ et $-\dfrac{1}{2}u_n + 4 \geqslant -\dfrac{1}{2} \times 8 + 4$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

► Correction 18 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n > 0$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et donc $u_0 > 0$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n > 0$. Or, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2+u_n}$. u_{n+1} est donc le quotient de deux réels strictement positifs, il est donc strictement positif lui aussi. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$. On peut donc déterminer les variations de la suite (u_n) en étudiant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Or, pour tout entier naturel n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2u_n}{2+u_n} \times \frac{1}{u_n} = \frac{2}{2+u_n}.$$

Or, puisque $u_n > 0$, il en vient que $2+u_n > 2$ et donc que $\dfrac{2}{2+u_n} < 1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, et donc $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est strictement décroissante.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

On rappelle qu'une suite décroissante vérifie que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant -21$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = \dfrac{2}{3} \times 2 - 7 = -\dfrac{17}{3}$. On a bien $u_0 \geqslant u_1 \geqslant -21$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant -21$.
  On a donc $\dfrac{2}{3}u_n - 7 \geqslant \dfrac{2}{3}u_{n+1} - 7 \geqslant -21 \times \dfrac{2}{3} - 7$ c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant -21$. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

► Correction 20 – Voir l'énoncé

On rappelle qu'une suite décroissante vérifie que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 1$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 2 = 5$ et $u_1 = \sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3$. On a bien $u_0 \geqslant u_1 \geqslant 1$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 1$.
  On a donc $2u_n - 1 \geqslant 2u_{n+1} - 1 \geqslant 2 \times 1 - 1$. On applique alors la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ à l'inégalité. Cette fonction étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, le sens de l'inégalité ne change pas.
  Ainsi, $\sqrt{2u_n - 1} \geqslant \sqrt{2u_{n+1} - 1} \geqslant \sqrt{2 \times 1 - 1}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant -21$.
  $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

► Correction 21 – Voir l'énoncé

La fonction f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. De plus, pour tout réel positif x,

$$f'(x) = \frac{5 \times (x+2) - 1 \times (5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}.$$

Ainsi, pour tout réel positif x, $f'(x) > 0$. f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ ».

- **Initialisation** : Pour $n=0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5\times 1+4}{1+2} = \dfrac{9}{3} = 3$ et donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. La fonction f étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on peut l'appliquer à cette inégalité sans en changer le sens. Ainsi,

  $$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4).$$

  Or, $f(0) = 2$, qui est supérieur à 0, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(4) = 4$. Il en vient que

  $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4.$$

  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie. $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 22 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$ ».

- **Initialisation** : pour $n=0$, on a $a_0 = \dfrac{1}{10}$, $b_0 = 1$, $a_1 = \mathrm{e}^{-b_0} = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $b_1 = \mathrm{e}^{-a_0} = \mathrm{e}^{-0,1}$.
  D'une part, puisque $10 \geqslant \mathrm{e}$, en appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a que $\dfrac{1}{10} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, c'est-à-dire $a_0 \leqslant a_1$.
  Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ étant croissante sur $\mathbb{R}$. On a donc que $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-0,1} \leqslant \mathrm{e}^0$, c'est-à-dire $a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$.
  Finalement, on a bien que $0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0 \leqslant 1$. $P(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on a alors

  $$\mathrm{e}^0 > \mathrm{e}^{-a_n} \geqslant \mathrm{e}^{-a_{n+1}} \geqslant \mathrm{e}^{-b_{n+1}} \geqslant \mathrm{e}^{-b_n} \geqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

  Ainsi, puisque $\mathrm{e}^{-1} > 0$, on a, en lisant cette inégalité dans l'autre sens,

  $$0 < a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1} \leqslant 1.$$

  $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.