Croissance linéaire

1 Phénomène discret

1.1 Notion de suite

Définition 1 : Une suite numérique est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels n.

Une suite est en général notée u.

■ **Exemple 1 :** On considère la suite définie pour tout entier naturel n par $u(n) = n^2 + 1$.

On a donc $u(0) = 0^2 + 1 = 1$, $u(1) = 1^2 + 1 = 2$ et ainsi de suite. ■

Définition 2 : On dit qu'une suite est définie par récurrence si chaque terme de la suite se calcule à partir du terme précédent.

■ **Exemple 2 :** On considère la suite u définie par son premier terme $u(0) = 3$ et pour laquelle chaque terme est égale au double du précédent. On a donc $u(1) = 2 \times u(0) = 2 \times 3 = 6$, $u(2) = 2 \times 6 = 12$ etc.

Pour tout entier n, on a alors $u(n+1) = 2u(n)$. Il s'agit de la relation de récurrence de la suite. ■

1.2 Suite arithmétique

Définition 3 : On dit qu'une suite u est arithmétique s'il existe un réel r, appelé raison de la suite, tel que pour tout entier naturel n, $u(n+1) = u(n) + r$.

Autrement dit, pour passer d'un terme de la suite au suivant, on ajoute toujours la même quantité r, que l'on appelle la **raison** de la suite u.

On dit qu'un phénomène suit une croissance linéaire discrète si celui-ci peut être modélisé par une suite arithmétique.

Remarque : Attention, la quantité r peut être négative !

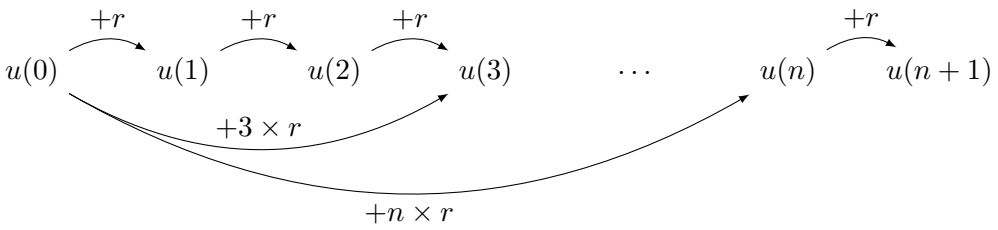
$$u(0) \underset{-r}{\overset{+r}{\rightleftarrows}} u(1) \underset{-r}{\overset{+r}{\rightleftarrows}} u(2) \underset{-r}{\overset{+r}{\rightleftarrows}} u(3) \quad \cdots \quad u(n) \underset{-r}{\overset{+r}{\rightleftarrows}} u(n+1)$$

■ **Exemple 3 :** On considère la suite arithmétique u de premier terme $u(0) = 3$ et de raison 5. On a alors $u(1) = 3 + 5 = 8$, $u(2) = 8 + 5 = 13$, $u(3) = 13 + 5 = 18$. etc. ■

■ **Exemple 4 :** Un particulier souhaité acheter une nouvelle voiture électrique au prix de 30 000 euros. On lui propose de régler ce paiement en 200 fois sans frais, en réglant chaque mois une certaine somme. Si l'on note $R(n)$ la somme restante à régler n mois après l'achat, on modélise ainsi une (dé)croissance linéaire : en effet, d'un mois sur l'autre, cette quantité diminue d'un montant fixe (qui est 150 euros). ■

Propriété 1 : Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u(n) = u(0) + rn$.

Autrement dit, pour passer du premier terme à un terme quelconque de la suite, il suffit d'ajouter n fois la raison.



■ **Exemple 5 :** A la SNCF, la carte Jeunes coûte 49 euros par an et permet de bénéficier de 30% de réduction sur tous les voyages en 2nde classe.

Sans la carte Jeunes, le trajet Paris-Rouen coûte ainsi 25 euros. En prenant la carte Jeunes, celui-ci coûte donc 25×0.7 soit 17.5 euros.

Si l'on ne prend pas la carte Jeunes, n trajets coûtent alors $25n$ euros. En revanche, si l'on prend la carte Jeunes, n trajets coûtent $49 + 17.5n$: 49 euros pour l'achat de la carte et 17.5 euros pour chaque billet.

On se pose alors la question du nombre de trajets annuels à partir duquel la carte est intéressante. Cela revient à réduire l'inéquation $49 + 17.5n \leqslant 25n$. Les solutions de cette inéquation correspondent aux cas où la carte est plus intéressante que l'achat individuel.

Résolvons cette inéquation : en retirant $17.5n$ des deux côtés, nous obtenons $49 \leqslant 7.5n$. En divisant alors par 7.5, on obtient alors $\frac{49}{7.5} \leqslant n$. Or, $\frac{49}{7.5} \simeq 6.53$. La carte Jeunes est donc avantageuse à partir de 7 trajets annuels. ■

Propriété 2 : On considère une suite u dont on représente le nuage de points dans un repère quelconque.

La suite u est arithmétique si et seulement si tous les points du nuage de points sont alignés.

2 Phénomène continu

Définition 4 : On dit qu'une fonction f est affine s'il existe des réels m et p tels que, pour tout réel x, on a $f(x) = mx + p$. m est appelé coefficient directeur de la fonction f.

On dit qu'un phénomène suit une croissance linéaire continue si celui-ci peut être modélisé par une fonction affine.

■ **Exemple 6 :** La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 3x + 2$ est une fonction affine de coefficient directeur 3. ■

Propriété 3 : Le coefficient directeur s'interprète de la manière suivante : si la variable x augmente d'une certaine quantité n, alors la valeur de la fonction $f(x)$ augmente de $n \times m$.

■ **Exemple 7 :** La pression de l'eau exercée sur un plongeur en fonction de la profondeur à laquelle il se trouve suit une croissance linéaire. Cette pression est de 1 bar à la surface de l'eau et elle augmente de 0.1 bar par mètre de profondeur.

Si l'on note P la pression à une profondeur x, cette pression vaut $P(x) = 0.1x + 1$.

Par exemple, à 20.5 mètres de profondeur, la pression exercée sur le plongeur est de $0.1 \times 20.5 + 1$ soit 3.05 bars. ■

Propriété 4 : Soit f une fonction affine, x_A et x_B des réels distincts.

Le coefficient directeur de f vaut alors $\dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$.

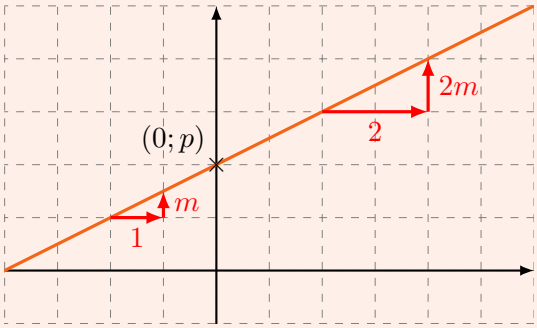
■ **Exemple 8 :** On considère une fonction affine f telle que $f(5) = 10$ et $f(20) = 310$. Le coefficient directeur de f vaut $\dfrac{f(20) - f(5)}{20 - 5} = \dfrac{310 - 10}{20 - 5} = \dfrac{300}{15} = 20$.

On peut alors retrouver toutes les autres valeurs de f. Par exemple, pour passer de $f(5)$ à $f(12)$, on ajoute 7 fois le coefficient directeur. Ainsi, $f(12) = f(5) + 7 \times 20 = 150$. ■

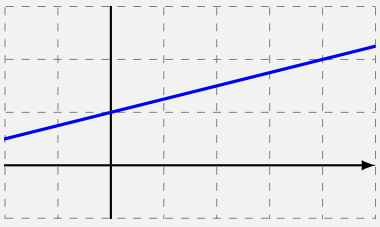
Propriété 5 : La représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto mx+p$ dans un repère quelconque est une droite.

Le coefficient directeur se trouve en prenant deux points sur cette droite et en calculant le rapport

$$\text{Coefficient directeur} = \frac{\text{Différence des ordonnées}}{\text{Différence des abscisses}}$$



■ **Exemple 9 :** Considérons la fonction affine tracée ci-dessous.



Prenons deux points sur cette droite. Par exemple, les points de coordonnées $(0; 1)$ et $(4; 2)$.

- La différence des ordonnées vaut $2 - 1 = 1$
- La différence des abscisses vaut $4 - 0 = 4$.

Le coefficient directeur vaut donc $\dfrac{1}{4}$.

■

Exercices

3 Phénomène discret

► Exercice 1
La suite de Fibonacci est une suite très célèbre dont les premiers termes sont 1 et 1 et où chaque terme est égal à la somme des deux précédents. Calculer les 10 premiers termes de cette suite. Est-elle arithmétique ?

► Exercice 2
On considère une suite u arithmétique de raison 5 et telle que $u(0) = 7$. Calculer $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$.

► Exercice 3
On considère une suite u arithmétique telle que $u(3) = 9$ et $u(10) = 58$.

1. Quelle est la raison de cette suite ?
2. Retrouver son premier terme $u(0)$.

► Exercice 4
Le tableau suivant présente le nombre d'immatriculations de véhicules neufs en milliers par année. Cette croissance peut-elle être qualifiée de linéaire ?

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Nombre	0.2	2.6	5.7	8.8	10.6	17.3	21.8

► Exercice 5
En 2012, le nombres de médecins généralistes libéraux en France était de 64142. En 2016, ce nombre n'est plus que de 60897 et en 2022, celui-ci culmine à 57033. Le nombre de médecins généralistes libéraux en France suit-il une (dé)croissance linéaire ?

► Exercice 6
Un appartement est mis en location pour un loyer annuel de 8400 euros. Ce loyer annuel augmente de 120 euros par an.

1. La croissance du loyer annuel est-elle linéaire ?
2. Calculer la valeur du loyer annuel après 1 an, après 2 an et après 20 ans.
3. Après combien d'années ce loyer annuel dépassera-t-il 10000 euros ?

► Exercice 7
A Mantes-la-Jolie en 2020, le prix au m^2 pour l'achat d'une maison était de 2800 euros. En 2021, ce prix est monté à 3000 euros. En supposant que ce prix suive une croissance linéaire, quel sera le prix au m^2 pour l'achat d'une maison en 2030 ?

► Exercice 8
Des relevés ont montré que le niveau de la mer a augmenté de 0.20 m entre 1901 et 2018. On admet que cette élévation suit une croissance linéaire.

1. Quelle est l'évolution annuelle du niveau de la mer en mm ?
2. Quelle sera l'élévation du niveau de la mer en mm en 2050 ?

► Exercice 9

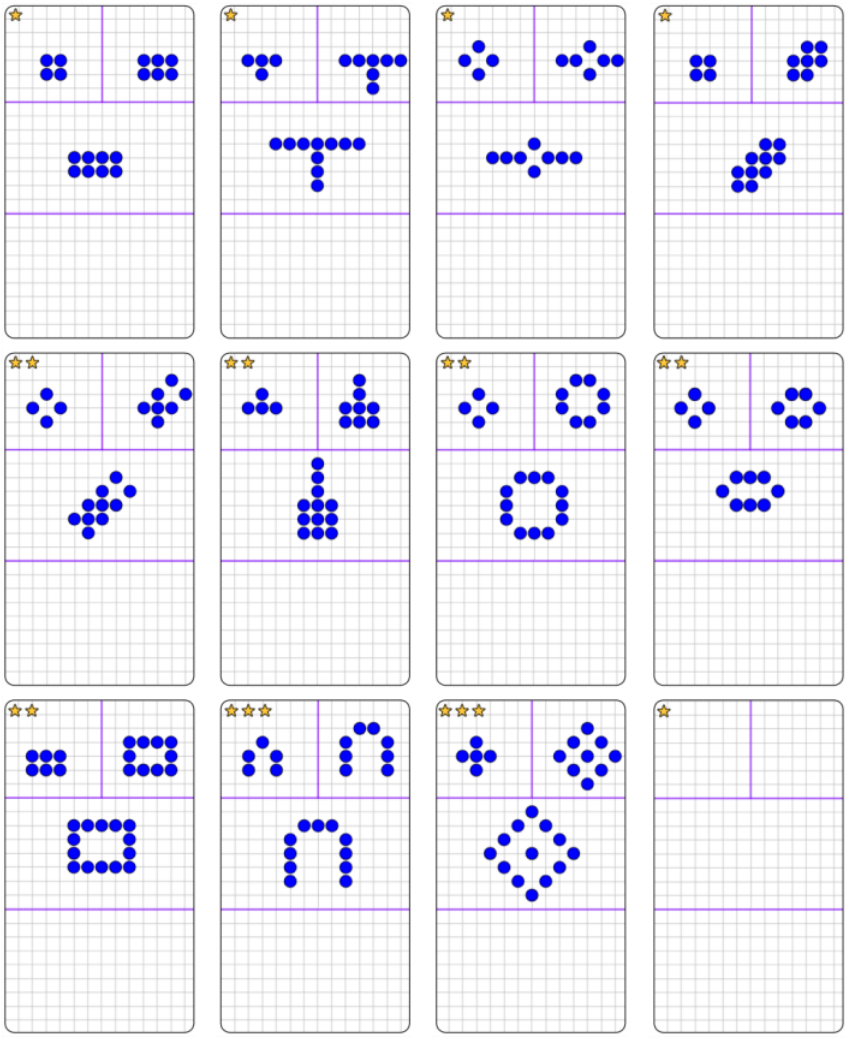
Lorsque l'on place un capital sur un compte à intérêts simples, celui-ci génère des intérêts tous les ans selon le capital déposé. Par exemple, si l'on dépose 1000 euros au taux de 3%, le capital augmentera tous les ans de $1000 \times 3/100$ soit 30 euros.

1. Expliquer pourquoi l'évolution d'un capital sur un compte à intérêts simples correspond à une situation de croissance linéaire.
2. Je dépose en 2023 la somme de 4200 euros sur un compte à intérêts simples au taux de 4%. On note $u(n)$ la somme détenue n après ce dépôt.
   (a) Quelle est la nature de la suite u ? On précisera son premier terme et sa raison.
   (b) Quelle somme aurai-je sur mon compte 7 ans après ce dépôt ?
   (c) En quelle année aurai-je 8000 euros sur mon compte ?

► Exercice 10

Chaque carte présente les trois premières étapes d'une évolution d'un motif pour pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.

1. En suivant la règle d'évolution des motifs précédents, dessiner dans la dernière case le motif correspondant pour $n = 3$
2. Dans chacun des cas, combien faudra-t-il dessiner de points pour la 10ème étape ?
3. Dans le dernier encadré, proposer une évolution de motifs pour laquelle la croissance du nombre de points est linéaire.



4 Phénomène continu

► Exercice 11

Aujourd'hui encore, certains numéros sont surtaxés. Dans les pires cas, le prix d'un appel peut alors être de 3 euros par appel, auquel s'ajoute un montant de 80 centimes par minute.

1. Exprimer le prix P d'un appel en fonction du temps t passé au téléphone.
2. Combien devra payer quelqu'un qui reste en ligne durant 10 minutes et 30 secondes.
3. Un particulier reçoit une facture de 12 euros suite à un appel à un numéro surtaxé. Combien de temps est-il resté en ligne ?

► Exercice 12

En France, l'unité de température est le degré Celsius, noté °C. Dans certains pays anglo-saxons, l'unité de température utilisée est le degré Fagrenheit, noté °F.

Si l'on note F la température en °F et C la température en °C, on a alors la relation $F = \frac{9}{5}C + 32$

1. Quel est le type de fonction en jeu ici ? Quel est son coefficient directeur ?
2. A combien de degrés Fahrenheit équivaut une température de 25 degrés Celsius ?
3. Si la température en degré Celsius augmente de 5 degrés, de combien de degré Fahrenheit la valeur correspondante augmente-t-elle ?
4. A combien de degré Celsius équivaut une température de 212 degrés Fahrenheit ?
5. Pour quelle température les valeurs en degrés et Fahrenheit sont-elles égales ?

► Exercice 13

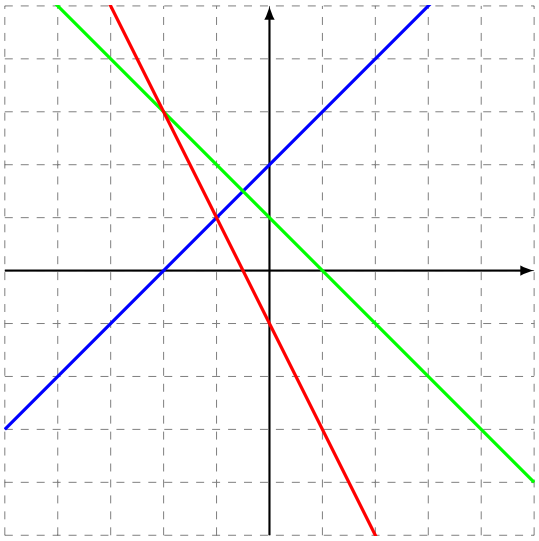
Déterminer le coefficient directeur de la fonction affine g telle que $g(0) = 2$ et $g(1) = 5$

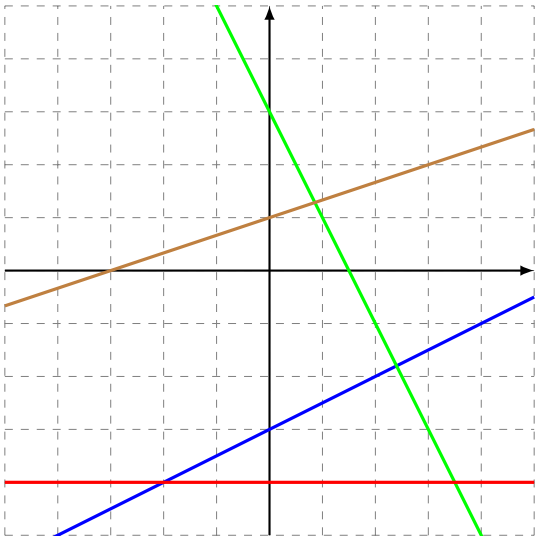
► Exercice 14

Déterminer le coefficient directeur de la fonction affine h telle que $h(3) = 8$ et $h(7) = -4$

► Exercice 15

Déterminer graphiquement le coefficient directeur des fonctions affines représentées ci-dessous





► Exercice 16

Le conservatoire du littoral, créé en 1976, acquiert des terrains sur le littoral français (métropole, Antilles, Guyane). En 1976, celui-ci détient 2 milliers d'hectares. En 2001, il en détient 65. On estime que la superficie détenue par le conservatoire peut être modélisée par une fonction affine.

1. Déterminer le coefficient directeur de cette fonction affine.
2. D'après ce modèle, quelle devrait être la superficie contrôlée par le conservatoire du littoral en 2023 ?

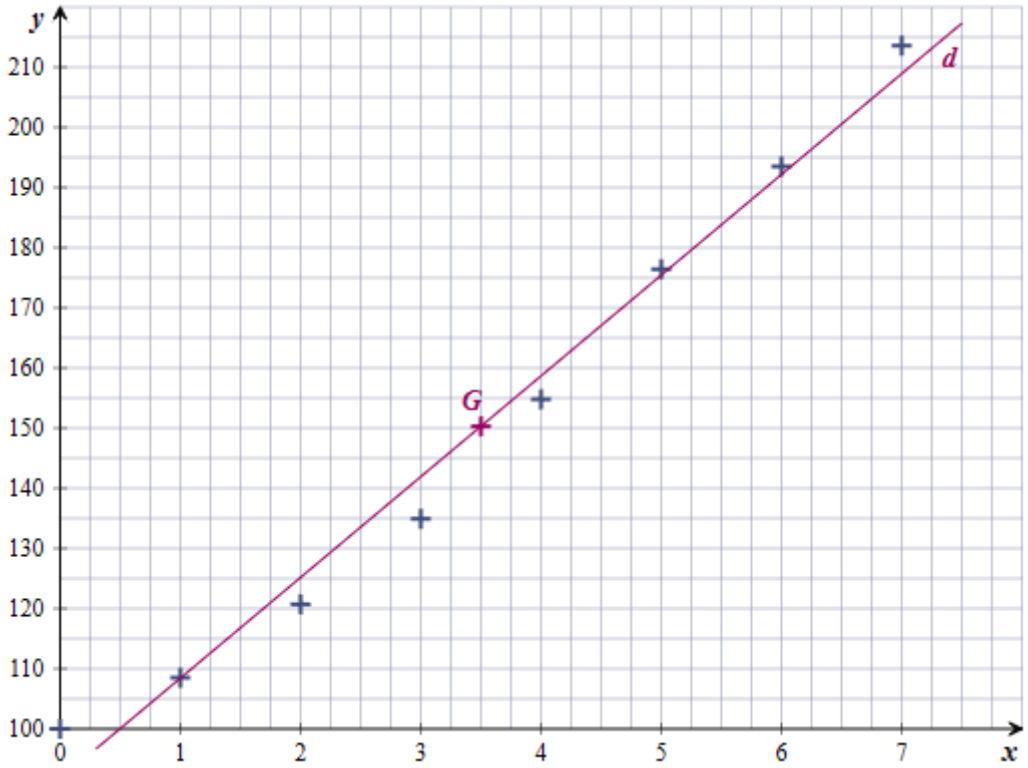
► Exercice 17

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice des prix de vente des appartements anciens à Paris au quatrième trimestre des années 2000 à 2007. :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre	100	108.5	120.7	134.9	154.8	176.4	193.5	213.6

L'indice 213.6 en 2007 signifie que le pris de vente a été multiplié par 2.136

On représente ci-dessous le nuage de points correspondant ainsi qu'une fonction affine permettant d'approcher ce nuage de points. Le point G est la point moyen obtenu en prenant pour abscisse la moyenne des rangs des années et en ordonnées la moyenne des indices.



1. Retrouver les coordonnées du point G par le calcul.
2. Une équation de cette droite est $y = 16.75x + 91.67$.
   (a) De combien augmente l'indice des prix de vente en 10 ans ?
   (b) Selon ces modèle, quel devrait être l'indice des prix de vente des appartements anciens à Paris en 2023 ?

► Exercice 18

Le tableau suivant donne l'évolution du SMIC horaire brut en euros de 2000 à 2006.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année	0	1	2	3	4	5	6
Nombre	6.41	6.67	6.83	7.19	7.61	8.03	8.27

1. Représenter le nuage de points associé à ces données sur un graphique. On prendra 2 carreaux pour une unité sur l'axe des abscisses et 4 carreaux pour une unité sur l'axe des ordonnées. L'axe des ordonnées commencera par ailleurs à 6.
2. Peut-on estimer que la croissance du SMIC horaire est linéaire ?
3. On estime que la fonction affine f définie par $f(x) = 0.324x + 6.314$ permet d'estimer le SMIC horaire brut selon le rang de l'année.
   (a) D'après cette formule, de combien d'euros augmenterait le SMIC horaire brut tous les ans ?
   (b) Au 1er mai 2023, le SMIC horaire brut est de 11.52 euros. Ce montant correspond-il aux prévisions données par la fonction affine ci-dessus ?

► Exercice 19

Le paiement de l'impôt sur le revenu est France est régi par un système de tranches. Le revenu imposable d'une personne est ainsi fractionné en tranches, chacune associée à un taux d'imposition précis. En 2023, les tranches de l'impôt sur le revenu pour une part sont ainsi constituées :

Fraction du revenu imposable	**Taux d'imposition sur la tranche**
Jusqu'à 10777 euros	0%
De 10778 à 27478 euros	11%
De 27479 à 78570 euros	30%
De 78571 euros à 168994 euros	41%
Supérieur à 168 994 euros	45%

Prenons l'exemple d'un célibataire au revenu net imposable de 32000 euros.

- La première tranche jusqu'à 10 777 euros n'est pas imposée. Il reste $32000 - 10777 = 21223$ euros à répartir dans les tranches
- On remplit la deuxième tranche avec $27478 - 10778 = 16700$ euros. Ces 16700 euros sont imposés à 11%. Le montant imposé sur cette tranche est donc de $\frac{11}{100} \times 16700 = 1837$. Il reste $21223 - 16700 = 4522$ euros à réparti dans les tranches.
- On remplit la troisième tranche avec les 4522 euros restants. Ce montant est imposé à 30%, soit un montant de $\frac{30}{100} \times 4522 = 1356.6$ euros.

L'impôt total pour cette personne est donc de $0 + 1837 + 1356.6 = 3193.6$ euros, arrondi à 3194 euros.

Le taux effectif de l'impôt est alors égal au montant imposé divisé par le revenu imposable, c'est-à-dire $\frac{3194}{32000} \simeq 0.0998$, soit un taux effectif d'environ 9.98%.

1. Calculer l'impôt sur le revenu et le taux effectif d'imposition d'une personne gagnant 80000 euros annuel.
2. On admet que pour une personne gagnant entre 78571 euros à 168994 euros annuels, l'impôt sur le revenu en fonction du revenu R est donné par la formule $0.41R - 15048.99$.
   (a) Vérifier que cette formule est conforme à votre précédent calcule.
   (b) Si une personne de cette tranche gagne 1000 euros annuels supplémentaires, de combien augmentera son impôt ?