

Problèmes de dénombrement

1 Tirages avec ordre et remise : p -uplets

Définition 1 : Un p -uplet (également appelé p -liste) est un tirage de p éléments parmi n au total où l'ordre de tirage est important et où un élément peut être sélectionné plusieurs fois.

■ **Exemple 1 :** On souhaite définir un mot de passe de 8 caractères. Chaque caractère peut être un chiffre de 0 à 9 ou une lettre majuscule de A à Z.

Dans un mot de passe, l'ordre des caractères compte et un même caractère peut être utilisée plusieurs fois : un tel mot de passe à 8 caractères peut donc être considéré comme un 8-uplet d'un ensemble ayant 36 éléments (10 chiffres et 26 lettres) ■

Propriété 1 : Le nombre de p -uplets d'un ensemble à n éléments vaut n^p

■ **Exemple 2 :** Reprenons l'exemple du mot de passe. Nous avons 36 possibilités pour choisir le premier caractère, 36 pour le deuxième, 36 pour le troisième et ainsi de suite jusqu'au huitième, où nous avons de nouveau 36 choix.

Ces choix étant faits les uns à la suite des autres, les possibilités se multiplient. Le nombre de mots de passe qu'il est ainsi possible de former est de $36 \times 36 \times \dots \times 36$, ou encore 36^8 , soit 2 821 109 907 456 possibilités. ■

2 Tirages avec ordre et sans remise : arrangements

Définition 2 : Un arrangement est un tirage de p éléments parmi n au total où l'ordre de tirage est important et où un élément ne peut pas être sélectionné plus d'une fois.

■ **Exemple 3 :** Un professeur souhaite établir une liste de passage à l'oral pour ses 20 étudiants. Il va, dans un premier temps, en faire passer une dizaine.

Pour un tel planning, l'ordre est évidemment important. Par ailleurs, un même élève ne peut pas apparaître deux fois sur le planning. Un planning de passage peut donc être considéré comme un arrangement de 10 éléments parmi 20 au total. ■

Définition 3 : On appelle factorielle de n , noté $n!$, le produit de tous les entiers allant de 1 à n . On convient par ailleurs que $0! = 1$.

■ **Exemple 4 :** $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$; $\frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 8 \times 7 = 56$ ■

Propriété 2 : Le nombre d'arrangements de k éléments parmi n au total vaut $\frac{n!}{(n-k)!}$

En pratique, il est ici préférable de se souvenir de la méthode ci-dessous plutôt que de la formule.

■ **Exemple 5 :** Une course réunit 10 coureurs. On souhaite déterminer le nombre de podiums possibles.

Il y a 10 possibilités pour la première place, 9 pour la deuxième et 8 pour la troisième. Le nombre de possibilités est donc de $10 \times 9 \times 8 = 720$. ■

3 Tirages sans ordre et sans remise : combinaison

Définition 4 : Une combinaison de k éléments parmi n est un tirage k éléments parmi n éléments au total où l'ordre n'importe pas et où les éléments tirés ne sont pas remis en jeu.

■ **Exemple 6 :** On dispose d'une classe de 48 étudiants et on souhaite former un groupe de TD de 24 étudiants.

L'ordre de sélection des étudiants pour former le groupe de TD n'a pas d'importance. Par ailleurs, un étudiant ne peut être sélectionné qu'une seule fois pour être intégré au groupe.

Ainsi, ce groupe de TD peut être vu comme une combinaison de 24 étudiants parmi les 48 disponibles. ■

Propriété 3 : Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n au total se note $\binom{n}{k}$ et se lit k parmi n .

Ce nombre vaut $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

■ **Exemple 7 :** On dispose de 13 fruits différents et on souhaite réaliser un smoothie en utilisant deux fruits différents.

L'ordre de sélection des fruits n'est pas important et un même fruit ne peut pas être sélectionné deux fois : nous sommes donc bien en présence d'une combinaison de 2 éléments parmi 13.

Le nombre de smoothies qu'il est ainsi possible de réaliser vaut alors $\binom{13}{2}$ soit $\frac{13!}{2!(13-2)!}$ soit 78. ■

■ **Exemple 8 :** Au loto, on remplit une grille en choisissant 5 nombres parmi ceux entre 1 et 49 puis 1 nombre chance entre 1 et 10.

- L'ordre de choix des premiers nombres n'a pas d'importance et un nombre ne peut être sélectionné plusieurs fois : nous sommes donc dans le cadre d'une combinaison de 5 éléments parmi 49. Le nombre de possibilités pour ces 5 nombres vaut donc $\binom{49}{5} = \frac{49!}{5!(49-5)!} = 1906884$.
- On a ensuite 10 choix pour le numéro chance. Ceci multiplie donc le nombre de grilles possibles par 10. Au total, il est possible de remplir une grille de loto de 19068840 manières différentes.

Ainsi, lorsque vous jouez au loto, vous avez moins d'une chance sur 19 millions de remporter le gros lot... Ce qui n'est pas très élevé. ■

■ **Exemple 9 :** A la belote, on utilise un jeu de 32 cartes. Chaque carte est déterminé par sa couleur (Pique, Trèfle, Carreau, Coeur) et sa valeur (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7). Pour le premier tour de distribution, chaque joueur reçoit 5 cartes, que l'on appelle une main. Combien existe-t-il de mains comportant exactement 2 as ?

L'ordre de distribution des cartes n'a pas d'importance ici : recevoir un as en première carte ou en deuxième carte n'a pas d'influence, on utilise donc les combinaisons.

- La main est composée de 2 as, choisis parmi 4, ce qui donne $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ possibilités
- Il reste 3 cartes à déterminer, choisis parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as.
Cela donne $\binom{28}{3} = \frac{28!}{3!(28-3)!} = \frac{28!}{3!25!} = 3276$ possibilités.
- Au total, cela fait $6 \times 3276 = 19656$ mains de 5 cartes contenant exactement 2 as.

■

4 Disjonctions de cas

Définition 5 : Une partition d'un ensemble A est le découpage de cet ensemble en plusieurs sous-ensembles tels que chaque élément de l'ensemble A de départ se trouve dans un et un seul des sous-ensemble ainsi constitués.

Propriété 4 : Le nombre d'éléments de l'ensemble total est égal à la somme des éléments des sous-ensembles qui constituent sa partition.

■ **Exemple 10 :** Reprenons l'exemple des mots de passe en élargissant les possibilités. Un mot de passe peut être désormais constitué de 6, 7 ou 8 caractères, chaque caractère étant un chiffre ou une lettre majuscule.

On découpe alors l'ensemble des mots de passe en 3 sous-ensembles :

- Les mots de passe à 6 caractères : il y en a 36^6
- Les mots de passe à 7 caractères : il y en a 36^7
- Les mots de passe à 8 caractères : il y en a 36^8

Le nombre total de mots de passe qu'il est ainsi possible de constituer est de $36^6 + 36^7 + 36^8$ soit un total de 2 901 650 853 888 mots de passe possibles.

■

■ **Exemple 11 :** Revenons sur les smoothies. On a toujours 13 fruits à disposition, mais on peut désormais réaliser des smoothies avec 1, 2 ou 3 fruits différents.

- Pour un fruit, il y a donc évidemment 13 possibilités
- Pour deux fruits, nous avons vu qu'il y en avait $\binom{13}{2}$ soit 78
- Pour les smoothies à trois fruits, il y a donc $\binom{13}{3}$ possibilités, soit 286

Au total, il y a donc $13 + 78 + 286 = 377$ smoothies différents qu'il est possible de réaliser.

■

5 Les exercices

► Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, dire si l'on peut modéliser la situation par un p -uplet, un arrangement ou une combinaison. Donner alors le calcul qu'il faut effectuer pour obtenir la réponse au problème. On ne demande pas forcément le résultat du calcul.

- On mélange un jeu de 52 cartes. On s'intéresse au nombre de mélanges de cartes qu'il est possible de réaliser.
- On lance 20 fois un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On note à chaque fois le numéro obtenu.
- Une salle contient 30 places pour 24 élèves. On s'intéresse au nombre de plans de classe que le professeur peut réaliser.
- Une classe de 30 élèves doit choisir 2 délégués. Combien de duos sont possibles ?
- Au football, lors d'une séance de tirs au but, 5 joueurs différents vont effectuer à tout de rôle leur tir au but parmi les 11 titulaires de l'équipe. On souhaite déterminer le nombre de possibilités pour sélectionner ces 5 tireurs.

► Exercice 2

Un restaurant propose 5 entrées, 3 plats et 4 desserts. Il est possible de commander des menus Entrée-Plat, Plat-Dessert ou Entrée-Plat-Dessert. Combien de menus différents peut-on alors créer ?

► Exercice 3

Lorsque vous étiez au lycée, si vous étiez en filière générale, vous avez peut-être confronté au choix des spécialités. Vous deviez alors choisir en seconde 3 spécialités parmi les 13 proposées. Combien aviez-vous de possibilités de choix de spécialité au total ?

► Exercice 4

Une cours hippique réunit 8 jockeys et leurs chevaux. Le "quarté dans l'ordre" est un pari qui consiste à deviner les quatre premiers chevaux arrivés dans l'ordre. Combien de paris différents est-il possible de réaliser ?

► Exercice 5

Pour préparer le prochain devoir de mathématiques, le professeur donne une liste de dix exercices et vous recommande d'en travailler cinq.

1. Combien de combinaisons d'exercice pouvez-vous construire ?
2. Le professeur insiste sur le fait que l'exercice 8 est à le travailler absolument. Il vous reste donc 4 exercices à choisir. Combien de combinaisons pouvez-vous construire ?

► Exercice 6

Une associations sportive propose diverses activités telles que le football, le handball, l'athlétisme etc. Ces activités sont au nombre de 20. Sur sa fiche d'inscription, chaque adhérent doit alors choisir 3 activités au maximum parmi ces 20.

1. Si la préférence des activités n'entre pas en compte, combien de fiches d'inscription différentes peut-on former ?
2. Face à l'affluence grandissante, l'association à ses adhérents de classer ces 3 disciplines au maximum selon les préférences de l'adhérent. Combien de fiches différentes peut-on alors former ?

► Exercice 7

Un glacier propose 10 parfums de glace. Il est possible de réaliser des coupes avec une ou deux boules de glace, potentiellement ayant le même parfum. Combien de coupes de glaces différentes peut-on réaliser ?

► Exercice 8

On considère un jeu de 32 cartes. Chaque carte possède une couleur (Coeur, Pique, trèfle, Carreau) et une valeur (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7). Une main est un ensemble de 5 cartes tirées dans ce paquet, sans tenir compte de l'ordre des cartes tirées. Déterminer le nombre de mains :

- comportant exactement 3 coeurs ;
- comportant exactement un roi et exactement deux dames ;
- comportant 3 ou 4 rois.

► Exercice 9

Depuis 2009, une plaque d'immatriculation est composée de trois parties : deux lettres, puis 3 chiffres, puis deux lettres. On ne peut pas utiliser les lettres I, O et U. De plus, il n'est pas possible d'utiliser le couple SS sur une plaque. Il n'est pas non plus possible d'utiliser le couple WW pour les deux premières lettres.

Combien de plaques d'immatriculation différentes peut-on attribuer en suivant ces instructions ?

► Exercice 10

L'enseigne de restauration rapide "Five Guys" propose des hamburgers personnalisés. Pour concevoir son hamburger, le client doit sélectionner

- La taille : little ou classic
- Avec ou sans bacon
- Avec ou sans cheddar
- Un choix de 15 ingrédients supplémentaires : le client peut alors choisir autant d'ingrédients qu'il souhaite parmi les 15 pour ajouter à son hamburger.

L'enseigne affirme alors sur ses publicités qu'il est possible de réaliser plus de 250 000 hamburgers différents. Que pensez-vous de cette affirmation ?

On pourra utiliser le résultat suivant : $\binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \binom{15}{2} + \dots + \binom{15}{15} = 2^{15}$.

► Exercice 11

La relation de Pascal permet de construire récursivement les coefficients binomiaux. Ces coefficients peuvent être arrangés en triangle et forment ce que l'on appelle le triangle de Pascal

k \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Dans ce triangle, on démarre avec un 1 en haut à gauche. Pour compléter chaque cellule, on ajoute alors le nombre au-dessus avec le nombre en haut à gauche. Les cases vides se voient assigner la valeur 0. On peut alors lire les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ dans ce triangle.

Compléter les lignes correspondant à $n = 7$ et $n = 8$ dans le triangle de Pascal.

En déduire les valeurs de $\binom{7}{4}$, $\binom{8}{6}$ et $\binom{8}{2}$. Vérifier en faisant le calcul.