1. Cours : Compléments sur la dérivation

1 Rappels sur la dérivation

1.1 Fonction dérivée

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et h un réel non nul tel que $a+h \in I$.

- On dit que f est dérivable en a si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Cette limite est appelée *nombre dérivé de f en a* et est notée $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$. On appelle alors *fonction dérivée* de f sur I la fonction

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{array} \right.$$

■ **Exemple 1 :** On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Soit x un réel et h un réel non nul.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x+h$$

Lorsque h se rapproche de 0, cette quantité tend vers $2x$.
Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2x$. ■

1.2 Dérivées usuelles

$f : x \mapsto$	Définie sur	Dérivable sur	$f' : x \mapsto$
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$mx+p$, m et p réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	m
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^n pour $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\exp(ax+b)$, a et b réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a\exp(ax+b)$

1.3 Opérations sur les dérivées

Théorème 1 : Soit I un intervalle, u et v deux fonctions dérivables sur I, k un réel. Alors les fonctions ku, $u+v$ et uv sont dérivables sur I. Si de plus, v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est également dérivable sur I. On a alors

$$(ku)' = ku' \qquad (u+v)' = u'+v'$$

$$(uv)' = u'v+uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

■ **Exemple 2 :** On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2-3x+1)\exp(3x+1)$, définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = x^2-3x+1$ et $v(x) = \exp(3x+1)$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 2x-3$.
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = 3\exp(3x+1)$.

On a $f = uv$. Ainsi, f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a $f' = u'v+uv'$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f'(x) = (2x-3)\times\exp(3x+1)+(x^2-3x+1)\times 3\exp(3x+1) = (3x^2-7x)\exp(3x+1).$$

■

1.4 Tangente à la courbe

Définition 2 — Tangente à la courbe : Soit f une fonction dérivable en a. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite de coefficient directeur $f'(a)$ et passant par le point de coordonnée $(a;f(a))$.

Propriété 1 : Soit f une fonction dérivable en a. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation

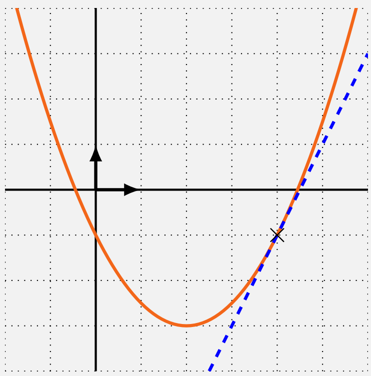
$$y = f'(a)\times(x-a)+f(a).$$

■ **Exemple 3 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = \frac{x^2}{2}-2x-1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = x-2$.
Déterminons l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4

- $f'(4) = 4-2 = 2$
- $f(4) = \frac{4^2}{2}-2\times4-1 = -1$

Cette tangente a pour équation $y = f'(4)\times(x-4)+f(4)$ soit $y = 2(x-4)-1$ et donc $y = 2x-9$.



■

1.5 Variations d'une fonction

Propriété 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

■ **Exemple 4 :** On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 3x + 1)\exp(3x+1)$ étudiée précédemment. On a vu que pour tout réel x, on a $f'(x) = (3x^2 - 7x)\exp(3x+1) = x(3x-7)\exp(3x+1)$.

$f'(x)$ étant écrite sous forme factorisée, on peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire les variations de f.

x	$-\infty$		0		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$\exp(3x+1)$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	e	↘	$-\frac{5\mathrm{e}^8}{9}$	↗	

■

2 Dérivée seconde

Définition 3 — Dérivée seconde : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa fonction dérivée f' est également dérivable sur I (on dit également que f est deux fois dérivable sur I).

On appelle fonction *dérivée seconde* de f la fonction dérivée de f'. Cette fonction est notée f''.

Pour tout $x \in I$, $f''(x) = (f')'(x)$.

■ **Exemple 5 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{3x-2}$. Posons, pour tout réel x, $u_1(x) = 2x+1$ et $v_1(x) = \mathrm{e}^{3x-2}$.

- u_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_1'(x) = 2$.
- v_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v_1'(x) = 3\mathrm{e}^{3x-2}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = u_1'(x) \times v_1(x) + u_1(x) \times v_1'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{3x-2} + (2x+1) \times 3\mathrm{e}^{3x-2} = (6x+5)\mathrm{e}^{3x-2}.$$

Posons alors, pour tout réel x, $u_2(x) = 6x+5$ et $v_2(x) = e^{3x-2}$.

- u_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_2'(x) = 6$.
- v_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v_2'(x) = 3e^{3x-2}$.

Ainsi, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f''(x) = u_2'(x) \times v_2(x) + u_2(x) \times v_2'(x) = 6 \times e^{3x-2} + (6x+5) \times 3e^{3x-2} = (24x+21)e^{3x-2}.$$

■

3 Composition de fonctions

Définition 4 — Fonction composée : Soit I et J deux parties de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction définie sur J et g une fonction définie sur I telle que pour tout réel x, $g(x) \in J$.

On définit la *fonction composée* de f et g notée $f \circ g$ par

$$\text{Pour tout } x \in I,\ f \circ g(x) = f(g(x)).$$

L'idée derrière la composition de fonctions est simplement d'appliquer successivement plusieurs fonctions.

$$f \circ g : x \overset{g}{\longmapsto} g(x) \overset{f}{\longmapsto} f[g(x)]$$

■ **Exemple 6 :** Pour tout réel x, on note $f(x) = x^2$ et $g(x) = x+3$. Alors, pour tout réel x,

- $f \circ g(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (x+3)^2$.
- $g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x)+3 = x^2+3$.

■

Attention ! En général, on n'a pas $f \circ g = g \circ f$! Ces deux fonctions ne sont d'ailleurs pas forcément définies sur le même ensemble.

Propriété 3 : Soit I et J deux intervalles, f une fonction définie et dérivable sur J et g une fonction définie et dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $g(x) \in J$. Alors $f \circ g$ est dérivable et pour tout réel x dans I,

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times (f' \circ g)(x).$$

■ **Exemple 7 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x-2}$. Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x^2+3x-2$. Pour tout réel x, on a alors $f(x) = u(v(x)) = u \circ v(x)$.

- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = 2x+3$
- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = \mathrm{e}^x$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = (2x+3)e^{x^2+3x-2}.$$

■

Propriété 4 — Cas particuliers : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

- Pour tout entier naturel n, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- e^u est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$.
- Si pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- Si pour tout réel x, $u(x) \neq 0$, $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\dfrac{u'}{u^2}$.

Exemple 8 : Pour tout réel x, posons $f(x) = (4x+1)^9$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 4x+1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$. Or, $f = u^9$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 9 \times u' \times u^8$, c'est-à-dire que pour tout réel x, on a

$$f'(x) = 9 \times 4 \times (4x+1)^{9-1} = 36 \times (4x+1)^8.$$

■

Exemple 9 : Pour tout réel x, posons $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = x^2+1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas. Or, $f = \dfrac{1}{u}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = -\dfrac{u'}{u^2}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

■

Exemple 10 : On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in [-2;2]$ par $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Bien que la fonction f soit définie sur l'intervalle fermé $[-2;2]$, elle n'est en revanche dérivable que sur l'intervalle ouvert $]-2;2[$. Pour tout réel $x \in]-2;2[$, on a

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

■

2. Exercices

Rappels sur la dérivation

▶ Exercice 1 – Voir le corrigé

Dériver les fonctions suivantes, en précisant leur domaine de définition et de dérivation.

$f_1 : x \mapsto 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

$f_2 : x \mapsto 8x^7 + \dfrac{4}{x^2}$

$f_3 : x \mapsto 2x^4 + \mathrm{e}^{3x-1}$

$f_4 : x \mapsto (5x^2 + 2x - 1)\mathrm{e}^x$

$f_5 : x \mapsto (1 - 6x^2)\mathrm{e}^{3x+2}$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

$f_7 : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x - 5}$

$f_8 : x \mapsto \dfrac{x + \mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^x}$

▶ Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 45x + 21$.

1. f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $f'(x)$?
2. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

▶ Exercice 3 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{10x + 4}{5x^2 + 1}$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

▶ Exercice 4 – Voir le corrigé

Pour tout réel $x \neq -1$, on pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$ et que pour tout réel x dans ces intervalles
$$f'(x) = \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(1 + x)^2}.$$
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.

▶ Exercice 5 – Voir le corrigé

Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto (-x^2 + x + 1)\mathrm{e}^{1-3x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice 6 (Centres étrangers 2024) – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n\mathrm{e}^{-u_n}$

1. Déterminer le sens de variations de la fonction f définie pour tout réel $x \in [0; 1]$ par $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

▶ Exercice 7 – Voir le corrigé

A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$

Dérivée seconde

▶ Exercice 8 – Voir le corrigé

Pour chacune des fonctions suivantes, deux fois dérivables sur l'intervalle mentionné, donner une expression de la dérivée seconde.

$f_1 : x \mapsto 6x^2 + 2x - 1$ sur $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto 3x^2 + 2x - \dfrac{3}{x}$, sur $]-\infty;0[$

$f_3 : x \mapsto x^2 e^{3x+1}$, sur $\mathbb{R}$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{3x^2-1}{x}$, sur $]-\infty;0[$

$f_5 : x \mapsto (1-6x^2)e^{3x+2}$, sur $\mathbb{R}$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$, sur $]0;+\infty[$

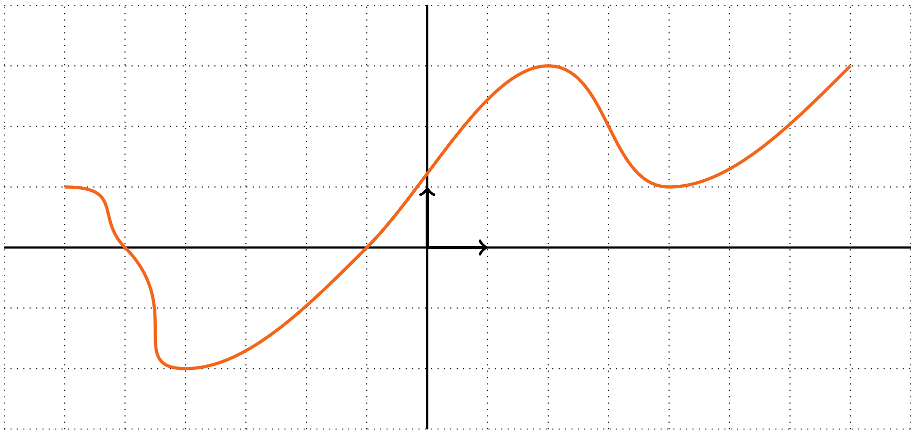
▶ Exercice 9 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 66x^2 - 360x + 120$.

1. Soit x un réel. Que vaut $f'(x)$?
2. On note f'' la dérivée de f'. Que vaut $f''(x)$?
3. Construire la tableau de signes de f''.
4. En déduire le tableau de variations de f'.
5. On indique de plus que $f'(-5) = f'(3) = f'(-2) = 0$. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

▶ Exercice 10 – Voir le corrigé

On considère une fonction f deux fois dérivable. On a représenté ci-dessous la courbe de f' dans un repère orthonormé.



On sait par ailleurs que $f(-6) = -1$, $f(-5{,}5) = 0$ et $f(-1) = 2$. Construire le tableau de signes de f'' et f sur l'intervalle $[-6;7]$.

▶ Exercice 11 – Voir le corrigé

Soit f et g deux fonctions deux fois dérivables sur un intervalle I. Justifier que (fg) est deux fois dérivable sur I et exprimer $(fg)''$ en fonction de f, g et de leurs dérivées.

▶ Exercice 12 – Voir le corrigé

Soit a et b deux réels. Pour tout réel x, on pose $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$.

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis donner une expression de $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Montrer que pour tout réel x, $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$.

► Exercice 13 – Voir le corrigé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et n un entier naturel. Lorsqu'il est possible de dériver n fois la fonction f sur I, on dit que f est n fois dérivable et on note $f^{(n)}$ la fonction obtenue en dérivant n fois. On a alors $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$...

1. On considère la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, f est n fois dérivable et pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = (x+n)\mathrm{e}^x$.
2. On considère la fonction $g : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, g est n fois dérivable et pour tout réel x, $g^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)\mathrm{e}^x$.

Composition de fonctions

► Exercice 14 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^2+1$, $g(x) = 3x+2$ et $h(x) = 2-x$.
Donner une expression de $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$, $(h\circ g)(x)$ et $(f\circ g\circ h)(x)$.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

Exprimer chacune des fonctions suivantes comme la composition de deux fonctions « usuelles ». On ne se souciera pas des domaines de définition.

$f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{1+x^2}$ $\qquad f_2 : x \mapsto (3x+8)^7$ $\qquad f_3 : x \mapsto \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$

► Exercice 16 – Voir le corrigé

Soit f une fonction définie sur un ensemble E. On dit que f est une involution de E si pour tout $x\in E$, $(f\circ f)(x) = x$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$.
2. Soit a un réel. Montrer que la fonction $x \mapsto a-x$ est une involution de $\mathbb{R}$.
3. Soit a et b deux réels, avec $b \neq 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{b}{x-a}+a$ est une involution de $\mathbb{R}\setminus\{a\}$.

► Exercice 17 – Voir le corrigé

Dériver les fonctions suivantes, dérivables sur l'intervalle donné.

$f_1 : x \mapsto (3x+2)^2$, sur $\mathbb{R}$ $\qquad f_2 : x \mapsto (6x^2+3x+4)^3$, sur $\mathbb{R}$

$f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$, sur $]0;+\infty[$ $\qquad f_4 : x \mapsto \sqrt{2x^2-5x+7}$,sur $\mathbb{R}$

$f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{(3x+6)^2}$, sur $]-2;+\infty[$ $\qquad f_6 : x \mapsto \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}$, sur $]-\infty;0[$

► Exercice 18 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{3x^2+2x-1}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Construire le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1.

► Exercice 19 – Voir le corrigé

Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-4x+5}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puis tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

► Exercice 20 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. On note D le domaine de définition de f et D' son domaine de dérivabilité.

1. Déterminer D et D'.
2. Donner une expression de $f'(x)$ pour tout $x \in D'$.
3. Pour tout réel $x \in D$, on pose $g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}$.
   (a) Justifier que g est dérivable sur D' et calculer $g'(x)$ pour tout x dans D'.
   (b) En déduire le sens de variations de g puis tracer l'allure de la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

► Exercice 21 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+2x-5}$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Construire le tableau de variation de f.
2. Déterminer une expression de $f''(x)$ pour tout réel x.

► Exercice 22 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \left(\dfrac{x^2-2x-3}{2}\right)^2$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ et tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $f''(x)$ pour tout réel x.

► Exercice 23 – Voir le corrigé

Donner une expression de la dérivée seconde de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1/x}$ sur $]0;+\infty[$.

► Exercice 24 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$, définie sur $]0;+\infty[$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{(2x-1)\mathrm{e}^x}{2x\sqrt{x}}$.
2. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

On considère désormais la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

On peut remarquer que pour tout réel x, $g(x) = f(x^2+x+1)$.

3. Justifier que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(2x^2+2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

   Indication : ne pas utiliser la dérivée d'un quotient vous épargnera de longs et pénibles calculs.
4. Construire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

3. Correction des exercices

Rappels sur la dérivation

► Correction 1 – Voir l'énoncé

a. Pour tout réel x, $f_1'(x) = 5\times 3x^2 + 2\times 2x - 3 = 15x^2 + 4x - 3$.

b. Pour tout réel non nul x, $f_2'(x) = 8\times 7x^6 + 4\times\left(-\dfrac{2}{x^3}\right) = 56x^6 - \dfrac{8}{x^3}$.

Remarque : en mettant au même dénominateur, on a $f_2'(x) = \dfrac{56x^9 - 8}{x^3}$.

c. Pour tout réel x, $f_3'(x) = 2\times 4x^3 + 3e^{3x-1} = 8x^3 + 3\mathrm{e}^{3x-1}$.

d. Pour tout réel x, on pose $u(x) = 5x^2 + 2x - 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 10x + 2$.
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

Ainsi, puisque $f_4 = uv$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_4' = u'v + uv'$. Pour tout réel x, on a donc

$$f_4'(x) = (10x+2)\mathrm{e}^x + (5x^2+2x-1)\mathrm{e}^x = (5x^2+12x+1)\mathrm{e}^x.$$

e. Pour tout réel x, on pose $u(x) = 1 - 6x^2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = -12x$.
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = 3\mathrm{e}^{3x+2}x$.

Ainsi, puisque $f_5 = uv$, f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$. Pour tout réel x, on a donc

$$f_5'(x) = -12x\mathrm{e}^{3x+2} + (1-6x^2)\times 3\mathrm{e}^{3x+2} = [-12x + (1-6x^2)\times 3]\mathrm{e}^{3x+2} = (-18x^2 - 12x + 3)\mathrm{e}^{3x+2}.$$

f. Pour tout réel non nul x, on pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x$.

- u est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, et pour tout réel non nul x, $u'(x) = \mathrm{e}^x$.
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, et pour tout réel non nul x, $v'(x) = 1$.

Ainsi, puisque $f_6 = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ et $f_6' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel non nul x, on a donc

$$f_6'(x) = \frac{\mathrm{e}^x\times x - \mathrm{e}^x\times 1}{x^2} = \frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}.$$

g. Pour tout réel $x \neq 5$, on pose $u(x) = x^2 + 3x + 1$ et $v(x) = x - 5$.

- u est dérivable sur $]-\infty;5[$ et $]5;+\infty[$, et pour tout réel $x\neq 5$, $u'(x) = 2x + 3$.
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $]-\infty;5[$ et $]5;+\infty[$, et pour tout réel $x \neq 5$, $v'(x) = 1$.

Ainsi, puisque $f = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $]-\infty;5[$ et $]5;+\infty[$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel $x \neq 5$, on a donc

$$f_7'(x) = \frac{(2x+3)(x-5) - (x^2+3x+1)}{(x-5)^2} = \frac{2x^2 - 10x + 3x - 15 - x^2 - 3x - 1}{(x-5)^2} = \frac{x^2 - 10x - 16}{(x-5)^2}.$$

h. Pour tout réel x, on pose $u(x) = x + e^3$ et $v(x) = e^x$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $u'(x) = 1$.
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $v'(x) = e^x$.

Ainsi, puisque $f = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel x, on a donc

$$f_8'(x) = \frac{1 \times e^x - (x+e^3)e^x}{(e^x)^2} = \frac{(-x+1-e^3)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x+1-e^3}{e^x}.$$

► Correction 2 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on a $f'(x) = 3x^2 + 6x - 45$.

Notons Δ le discriminant du polynôme $3x^2 + 6x - 45$. On a $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-45) = 576 > 0$.

Le polynôme $3x^2 + 6x - 45$ admet donc deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{576}}{2 \times 3} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 + \sqrt{576}}{2 \times 3} = 3.$$

Par ailleurs, le signe d'un polynôme est celui de son coefficient dominant (ici, 3) à l'extérieur des racines. Il est du signe opposé entre les racines. On peut alors dresser le tableau de signe de f' et en déduire le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	196	$\searrow$	-60	$\nearrow$	

► Correction 3 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 10x + 4$ et $v(x) = 5x^2 + 1$

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $u'(x) = 10$
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $v'(x) = 10x$

Ainsi, puisque $f = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel x, on a donc

$$f'(x) = \frac{10 \times (5x^2+1) - (10x+4) \times 10x}{(5x^2+1)^2} = \frac{-50x^2 - 40x + 10}{(5x^2+1)^2}$$

Pour tout réel x, $(5x^2+1)^2 > 0$. Il ne reste qu'à étudier le signe de $-50x^2 - 40x + 10$. C'est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $(-40)^2 - 4 \times 10 \times (-50) = 3600 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles distinctes qui sont

$$x_1 = \frac{-(-40) + \sqrt{3600}}{2 \times (-50)} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-40) - \sqrt{3600}}{2 \times (-50)} = \frac{1}{5} = 0.2$$

On peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		0.2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	5	$\searrow$	

► Correction 4 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x \neq -1$, on pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = 1+x$.

- u est dérivable sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$, et pour tout réel $x \neq -1$, $u'(x) = \mathrm{e}^x$.
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$, et pour tout réel $x \neq -1$, $v'(x) = 1$.

Ainsi, puisque $f = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$ et $f' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. Pour tout réel $x \neq -1$,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times (1+x) - \mathrm{e}^x \times 1}{(1+x)^2} = \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}$$

Pour tout réel $x \neq -1$, $(1+x)^2 > 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de x (hormis en -1, valeur interdite).

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

► Correction 5 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $u(x) = -x^2+x+1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = -2x+1$
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = \mathrm{e}^x$

Ainsi, puisque $f = uv$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v+uv'$. Pour tout réel x, on a donc

$$f'(x) = (-2x+1)\mathrm{e}^x + (-x^2+x+1)\mathrm{e}^x = (-x^2-x+2)\mathrm{e}^x.$$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$. Il ne reste donc qu'à étudier le signe de $-x^2-x+2$. Il s'agit d'un polynôme du second degré. Son discriminant vaut $\Delta = (-1)^2 - 4\times(-1)\times 2 = 9 > 0$. Le polynôme $-x^2-x+2$ admet donc deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times(-1)} = -2.$$

On peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	$3e^{-2}$	$\nearrow$	e	$\searrow$	

► Correction 6 – Voir l'énoncé

La fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $[0;1]$

De plus, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a

$$f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x} + 2x \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Or, pour tout $x \in [0;1]$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$. Par ailleurs, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $0 \geqslant -2x \geqslant -2$ et donc $2 \geqslant 2-2x \geqslant 0$. En particulier, pour tout $x \in [0;1]$, $2-2x \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout réel positif $x \in [0;1]$, $f'(x) \geqslant 0$. f est donc croissante sur $[0;1]$.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ ».

- **Initialisation :** Pour $n=0$, on a $u_0 = 0{,}1$ et $u_1 = 2 \times 0{,}1 \times \mathrm{e}^{-0{,}1} \simeq 0{,}18$. On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.La fonction f étant croissante sur $[0;1]$, on peut l'appliquer à cette inégalité sans en changer le sens. Ainsi,

  $$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1).$$

  Or, $f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(1) = \dfrac{2}{e} \leqslant 1$. Il en vient que

  $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{2}{e} \leqslant 1.$$

  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie. $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. On sait par ailleurs que $e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$. On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On a en effet $f(0) = \mathrm{e}^0 - 0 - 1 = 0$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$, soit $\mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0$ ou $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

Graphiquement, cela signifie que la courbe de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de sa tangente en 0.

Dérivée seconde

► Correction 8 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, $f_1'(x) = 12x + 2$ et $f_1''(x) = 12$.

Pour tout réel $x < 0$, $f_2'(x) = 6x + \dfrac{3}{x^2}$ et $f_2''(x) = 6 - \dfrac{6}{x^3}$.

Pour tout réel x, on pose $u_1(x) = x^2$ et $v_1(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$. u_1 et v_1 sont dérivables sur $\mathbb{R}$. f est donc également dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u_1'v_1 + u_1v_1'$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f_3'(x) = 2x \times \mathrm{e}^{3x+1} + x^2 \times 3\mathrm{e}^{3x+1} = (3x^2 + 2x)\mathrm{e}^{3x+1}.$$

Pour tout réel x, on pose $u_2(x) = 3x^2 + 2x$ et $v_2(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$. u_2 et v_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f_3' l'est donc également et $f_3'' = u_2'v_2 + u_2v_2'$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f_3''(x) = (6x+2)\mathrm{e}^{3x+1} + (3x^2+2x) \times 3\mathrm{e}^{3x+1} = (3x^2 + 12x + 2)\mathrm{e}^{3x+1}.$$

On peut remarquer que pour tout réel $x < 0$, $f_4(x) = \dfrac{3x^2}{x} - \dfrac{1}{x} = 3x - \dfrac{1}{x}$.

Ainsi, pour tout réel $x < 0$, $f_4'(x) = 3 + \dfrac{1}{x^2}$ et $f_4''(x) = -\dfrac{2}{x^3}$.

Pour tout réel x, on pose $u_1(x) = 1 - 6x^2$ et $v_1(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$.

- u_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_1'(x) = -12x$.
- v_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v_1'(x) = 3\mathrm{e}^{3x+2}x$.

Ainsi, puisque $f_5 = u_1v_1$, f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_5' = u_1'v_1 + u_1v_1'$. Pour tout réel x, on a donc

$$f_5'(x) = -12x\mathrm{e}^{3x+2} + (1-6x^2) \times 3\mathrm{e}^{3x+2} = [-12x + (1-6x^2) \times 3]\mathrm{e}^{3x+2} = (-18x^2 - 12x + 3)\mathrm{e}^{3x+2}.$$

Pour tout réel x, on pose alors $u_2(x) = -18x^2 - 12x + 3$ et $v_2(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$. u_2 et v_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f_5' l'est donc également. Pour tout réel x,

$$f_5''(x) = (-36x - 12)\mathrm{e}^{3x+2} + (-18x^2 - 12x + 3) \times 3\mathrm{e}^{3x+2} = (-54x^2 - 72x - 3)\mathrm{e}^{3x+2}.$$

Pour tout réel $x > 0$, on pose $u_1(x) = \mathrm{e}^x$ et $v_1(x) = x$. u_1 et v_1 sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et v ne s'annule pas sur cet intervalle. Ainsi, f_6 est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel x,

$$f_6'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}.$$

Posons alors, pour tout réel $x > 0$, $u_2(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ et $v_2(x) = x^2$. v_2 est dérivable et ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$. Par ailleurs, u_1 est dérivable sur $]0;+\infty[$ car c'est un produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout réel $x > 0$

$$u_1'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$$

Ainsi, pour tout réel $x > 0$

$$f_6''(x) = \frac{x\mathrm{e}^x \times x^2 - (x-1)\mathrm{e}^x \times 2x}{x^4} = \frac{(x^3 - 2x^2 + 2x)\mathrm{e}^x}{x^4} = \frac{(x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x}{x^3}$$

► Correction 9 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, $f'(x) = 12x^3 + 48x^2 - 132x - 360$ et $f''(x) = 36x^2 + 96x - 132$.

f'' est une fonction polynôme du second degré dont le discriminant vaut $96^2 - 4 \times 36 \times (-132) = 28224 > 0$. L'équation $f''(x) = 0$ admet donc deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-96 - \sqrt{28224}}{2 \times 36} = -\frac{11}{3} \quad \text{et} x_2 = \frac{-96 + \sqrt{28224}}{2 \times 36} = 1.$$

On peut alors construire le tableau de signes de f''. Par ailleurs, f'' étant la dérivée de f', on en déduit le tableau de variations de f'.

x	$-\infty$		$-11/3$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f'		↗		↘		↗	

Puisque f' est croissante sur $]-\infty; 5]$ et que $f'(5) = 0$, on en déduit que pour tout réel $x \leqslant 5$, $f'(x) \leqslant 0$. En raisonnant de même sur les autres intervalles, on en déduit le tableau de signes de f' et donc le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-5		$-11/3$		-2		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$			
f'		↗	0	↗		↘	0	↘		↗	0	↗	
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗		↗		↘		↘		↗	

► Correction 10 – Voir l'énoncé

f'' est la dérivée de f'. Les variations de f' nous donnent donc le signe de f''.

x	-6		-4		2		4		7
f'	1	↘	-2	↗	3	↘	1	↗	3
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Par ailleurs, à l'aide du signe de f', on peut construire le tableau de variations de f. Les informations sur les valeurs extrêmes de f nous permettent de construire son tableau de signes.

x	-6		-5.5		-5		-1		7
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+-$	0
f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\geqslant 0$	$\searrow$	2	$\nearrow$	
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	$+$	$+$	

► Correction 11 – Voir l'énoncé

Si f et g sont dérivables, alors fg l'est également et $(fg)' = f'g + fg'$. Si de plus f' et g' sont dérivables, alors $f'g$ et fg' le sont également et

- $(f'g)' = f''g + f'g'$;
- $(fg')' = f'g' + fg''$.

Ainsi, $(fg)'$ est dérivable et $(fg)'' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

Les fonctions $x \mapsto ax + b$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Leur produit est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = a\mathrm{e}^x + (ax+b)\mathrm{e}^x = (ax+a+b)e^x$ et $f''(x) = a\mathrm{e}^x + (ax+a+b)\mathrm{e}^x = (ax+2a+b)\mathrm{e}^x$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = (ax+2a+b)\mathrm{e}^x - 2(ax+a+b)\mathrm{e}^x + (ax+b)\mathrm{e}^x$$

et donc

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = (ax+2a+b-2ax-2a-2b+ax+b)\mathrm{e}^x = 0$$

► Correction 13 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = (x+n)\mathrm{e}^x$ ».

- **Initialisation** : f est bien dérivable 0 fois et pour tout réel x, $f^{(0)}(x) = f(x) = (x+0)\mathrm{e}^x$.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = (x+n)\mathrm{e}^x$. $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. f est donc $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x,

  $$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \mathrm{e}^x + (x+n)\mathrm{e}^x = (x+n+1)\mathrm{e}^x.$$

  $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie, P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « g est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)\mathrm{e}^{-x}$ ».

- **Initialisation** : g est bien dérivable 0 fois et pour tout réel x, $g^{(0)}(x) = g(x) = (-1)^0(x-0)\mathrm{e}^{-x}$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors g est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)\mathrm{e}^{-x}$. $g^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. g est donc $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x,
$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) = (g^{(n)})'(x) &= (-1)^n \times (\mathrm{e}^{-x} + (x-n) \times (-\mathrm{e}^{-x})) \\ &= (-1)^n(1-x+n)\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-1)^n \times (-(x-n-1))\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-1)^{n+1}(x-(n+1))\mathrm{e}^{-x.} \end{aligned}$$
$P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie, P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Composition de fonctions

► Correction 14 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x,

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 + 1 = (3x+2)^2 + 1 = 9x^2 + 12x + 5$.
- $(g \circ f)(x) = 3f(x) + 2 = 3(x^2+1) + 2 = 3x^2 + 5$.
- $(h \circ g)(x) = 2 - g(x) = 2 - (3x+2) = -3x$.
- $(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = (3h(x)+2)^2 + 1 = (8-3x)^2 + 1 = 9x^2 - 48x + 65$.

► Correction 15 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = 1 + x^2$. On a alors $f_1 = u \circ v$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^7$ et $v(x) = 3x + 8$. On a alors $f_2 = u \circ v$.

Pour tout réel positif x positif, on pose $u(x) = \sqrt{(}x)$. Pour tout réel x, on pose $v(x) = 1 + \mathrm{e}^x$. On a alors $f_3 = u \circ v$.

► Correction 16 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x \neq 0$, $f(f(x)) = \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x$. f est bien une involution de $\mathbb{R}^*$.

Pour tout réel x, $f(f(x)) = a - (a - x) = x$. f est une involution de $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $x \neq a$,
$$f(f(x)) = \frac{b}{\left(\frac{b}{x-a} + a\right) - a} + a = \frac{b}{\dfrac{b}{x-a}} + a = x - a + a = x.$$

f est une involution de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

a. Pour tout réel x, $f_1'(x) = 3 \times 2(3x+2) = 18x + 12$.

b. Pour tout réel x, $f_2'(x) = (12x+3) \times 3(6x^2+3x+4)^2 = (36x+9)(6x^2+3x+4)^2$.

c. Pour tout réel $x > 0$, $f_3'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

d. Pour tout réel x, $f_4'(x) = \dfrac{4x-5}{2\sqrt{2x^2-5x+7}}$.

e. Pour tout réel $x > 2$, $f_5'(x) = 3 \times \left(-\dfrac{2}{(3x+6)^3}\right) = -\dfrac{6}{(3x+6)^3}$.

f. Pour tout réel $x \neq 0$, $f_6'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}$.

► Correction 18 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2 + 2x - 1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$, f l'est donc aussi et $f' = u'e^u$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f'(x) = (6x+2)\mathrm{e}^{3x^2+2x-1}.$$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{3x^2+2x-1} > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $6x+2$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

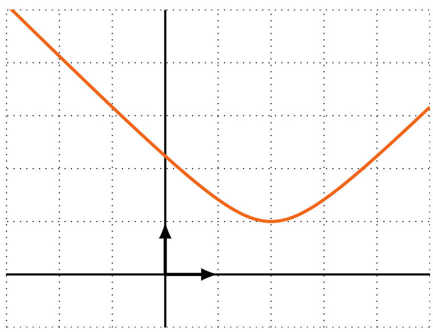
La tangente à la courbe de f à l'abscisse -1 a pour équation $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ soit $y = -4(x+1)+1$ ou encore $y = -4x - 3$.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, $x^2 - 4x + 5 > 0$. En effet, il s'agit d'un polynôme du second degré dont le discriminant est strictement négatif. De plus, $f(x) = \sqrt{u(x)}$. Ainsi, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $f'(x) = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}}$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2-4x+5} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2x-4$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	



► Correction 20 – Voir l'énoncé

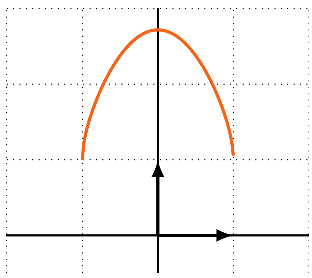
1. $\sqrt{1-x^2}$ existe si et seulement si $1-x^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x^2 \leqslant 1$ et donc $x \in [-1;1]$. Par ailleurs, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en zéro. Ainsi, f n'est pas dérivable en -1 et 1, qui sont les solutions de l'équation $1-x^2=0$. On a donc $D' =]-1;1[$.
2. Pour tout $x \in D'$, $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. (a) On a $g = \mathrm{e}^f$. Or, f est dérivable sur D', g l'est donc également et pour tout réel x de D',

$$g'(x) = f'(x) \times \mathrm{e}^{f(x)} = -\frac{x\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(b) Puisque pour tout réel $x \in D$, $\sqrt{1-x^2} > 0$ et $e^{-\sqrt{1-x^2}} > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-x$.

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	e	$\searrow$	1

(c) On trace l'allure de la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.



► Correction 21 – Voir l'énoncé

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = (2x+2)\mathrm{e}^{x^2+2x-5}$ qui est du signe de $2x+2$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	e^{-6}	$\nearrow$	

En utilisant la dérivée d'un produit, pour tout réel x, on a

$$f''(x) = 2 \times \mathrm{e}^{x^2+2x-5} + (2x+2) \times (2x+2)\mathrm{e}^{x^2+2x-5} = (4x^2+8x+6)\mathrm{e}^{x^2+2x-5}.$$

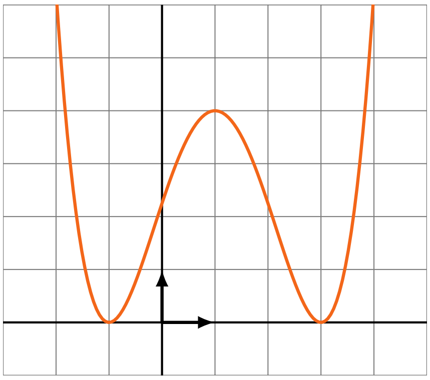
► Correction 22 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $u(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{2}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f = u^2$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 2u'u$. Pour tout réel x,

$$f'(x) = 2 \times (x-1) \times \frac{x^2-2x-3}{2} = (x-1)(x^2-2x-3).$$

Le polynôme x^2-2x-3 s'annule en -1 et en 3. Ainsi, pour tout réel x, $f'(x)=(x-1)(x+1)(x-3)$. On peut alors construire le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	



f' est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f''(x)=1\times(x^2-2x-3)+(x-1)\times(2x-2)=3x^2-6x-1.$$

► Correction 23 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x>0$, on pose $u(x)=\dfrac{1}{x}$. u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f=\mathrm{e}^u$. f est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'=u'\mathrm{e}^u$. Ainsi, pour tout réel $x>0$, $f'(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}$.

f' est également dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$. Par ailleurs, pour tout réel $x>0$,

$$f''(x)=-\left(\frac{-\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\times x^2-\mathrm{e}^{1/x}\times 2x}{(x^2)^2}\right)=\frac{(2x+1)\mathrm{e}^{1/x}}{x^4}.$$

► Correction 24 – Voir l'énoncé

1. Les fonctions $x\mapsto \mathrm{e}^x$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$. De plus, la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ ne s'annule pas sur cet intervalle. Ainsi, f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout réel $x>0$, on a

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x\times\sqrt{x}-\mathrm{e}^x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2}=\frac{1}{x}\times\frac{\mathrm{e}^x\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}-\mathrm{e}^x}{2\sqrt{x}}=\frac{(2x-1)\mathrm{e}^x}{2x\sqrt{x}}.$$

2. Pour tout réel $x>0$, $f'(x)$ est du signe de $(2x-1)$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\sqrt{2e}$	$\nearrow$	

3. La fonction $u : x \mapsto x^2+x+1$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x, $x^2+x+1>0$ (on calcule le discriminant du polynôme x^2+x+1, celui-ci est strictement négatif). Ainsi, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = u'(x)\times f'(u(x)) = (2x+1)\times\frac{(2(x^2+x+1)-1)e^{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

et donc

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(2x^2+2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

4. $g'(x)$ est du signe de $(2x+1)$ (on vérifie que pour tout réel x, $2x^2+2x+1>0$ à l'aide du discriminant par exemple).

x	0		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	