

Probabilités conditionnelles

1 Généralités sur les probabilités

1.1 Univers d'une expérience aléatoire

Définition 1 : Une *expérience aléatoire* est une expérience dont on ne peut prévoir le résultat à coup sûr.

Les résultats possibles de cette expérience s'appellent les *issues*. L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire s'appelle l'*univers*. On le note en général Ω .

■ **Exemple 1 :** On choisit un nombre entier au hasard entre 1 et 6 inclus, par exemple en lançant un dé classique. Les issues sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6. L'univers est $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. ■

■ **Exemple 2 :** On choisit un nombre entier au hasard entre 1 et 4 inclus puis un nombre au hasard entre 3 et 5 inclus. On fait ensuite la somme des deux nombres obtenus.

L'univers de cette expérience aléatoire est donc $\{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. ■

1.2 Loi de probabilité

Définition 2 : Définir une loi de probabilité sur un univers $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, c'est associer à tout nombre x_i un réel p_i positif tel que $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Le nombre p_i est la probabilité de l'issue x_i .

■ **Exemple 3 :** Dans une urne sont placées 3 boules jaunes, 5 boules rouges et 2 boules bleues, toutes indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard et on regarde sa couleur. Cette expérience aléatoire peut-être modélisée par la loi de probabilité suivante

Issue	Jaune	Rouge	Bleue
Probabilité	3/10	1/2	1/5

Définition 3 : On dit d'une loi de probabilité qu'elle est équiprobable sur un univers Ω fini si chaque événement élémentaire possède la même probabilité.

Propriété 1 : Dans ce cas, pour chaque issue, sa probabilité vaut $\frac{1}{|\Omega|}$, où $|\Omega|$ désigne le cardinal de Ω , c'est-à-dire son nombre d'éléments.

■ **Exemple 4 :** On lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6, et on regarde le nombre sur la face du dessus. Cette expérience peut être modélisée par l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et pour chaque issue de Ω , la probabilité d'aboutir à cette issue vaut $\frac{1}{6}$. ■

1.3 Calcul de probabilités

Probabilité d'un événement

Définition 4 : Un *événement* d'une expérience aléatoire est un sous-ensemble de son univers. S'il n'est composé que d'un élément, on parle d'*événement élémentaire*.

■ **Exemple 5 :** Pour l'univers $\Omega = \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, l'événement A : "Obtenir un nombre pair" est composé des issues 4, 6 et 8. $A = \{4; 6; 8\}$. ■

Définition 5 : On considère une expérience aléatoire sur un univers Ω et A un événement. La probabilité de l'événement A est la somme des probabilités des issues qui composent A . On la note $\mathbb{P}(A)$.

■ **Exemple 6 :** On considère l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$.

On associe aux issues de cet univers les réels $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{6}$ et $p_4 = \frac{1}{2}$

- On a bien une loi de probabilités : les réels associés sont positifs et $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$.
- L'événement B : "obtenir un nombre pair" est composé des issues 2 et 4.
- On a donc $\mathbb{P}(A) = p_2 + p_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Équiprobabilité

Propriété 2 : En situation d'équiprobabilité sur un univers Ω fini, la probabilité d'une issue A vaut

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas total}}$$

■ **Exemple 7 :** On lance un dé équilibré à 8 faces, numérotées de 1 à 8 et on regarde le numéro du dessus. Cette expérience peut-être modélisée par l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ en situation d'équiprobabilité. ■

La probabilité de chaque issue est $\frac{1}{8}$. L'événement A : "obtenir un nombre supérieur ou égal à 6" est composé des issues 6, 7 et 8, soit trois éléments. On a donc $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$.

Événement contraire

Définition 6 : On considère une expérience aléatoire sur un univers Ω et A un événement. On appelle *événement contraire* de A l'événement qui correspond à toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A . On le note $\bar{A}$.

■ **Exemple 8 :** Sur l'univers $\Omega = \{1; 4; 7; 14; 25\}$, le contraire de l'événement $A : \{1; 25\}$ est $\bar{A} : \{4; 7; 14\}$ ■

■ **Exemple 9 :** On lance un dé à 12 faces numérotées de 1 à 12. Le contraire de l'événement « Obtenir 9 ou plus » est « Obtenir 8 ou moins ». ■

1.4 Union et intersection d'événements

Définition 7 : Soient A et B deux événements.

- L'événement $A \cup B$ (A union B) est l'événement composé des issues qui réalisent **au moins** A ou B .
- L'événement $A \cap B$ (A inter B) est l'événement composé des issues qui réalisent **à la fois** A ou B .

■ **Exemple 10 :** Soit $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ un univers. On note A l'événement $\{1; 3; 7; 8\}$ et B l'événement $\{1; 5; 6; 7\}$

- $A \cup B = \{1; 3; 5; 6; 7; 8\}$
- $A \cap B = \{1; 7\}$

2 Probabilité conditionnelle

Définition 8 — Probabilité conditionnelle : Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A , la quantité

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

■ **Exemple 11 :** On considère l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. On tire un nombre uniformément au hasard sur Ω . On considère les événements

- A : le nombre est pair
- B : le nombre est supérieur ou égal à 3

Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, on a alors $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Par ailleurs, $A \cap B = \{4; 6\}$. Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Appliquant la définition, on trouve donc

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

Cette probabilité s'interprète comme la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.

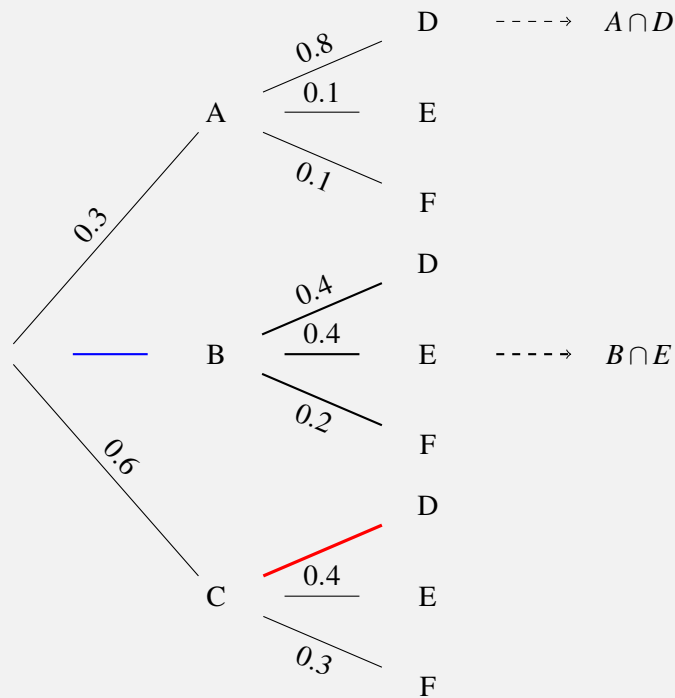
■ **Exemple 12 :** Une entreprise commande à une société de sondage une enquête sur la satisfaction de ses clients. Lors du premier appel téléphonique, la probabilité qu'un client réponde est de 0,25. Si le client répond à l'appel, la probabilité qu'il réponde au questionnaire de la société est de 0,3. On note R l'événement "la personne répond à l'appel" et Q l'événement "la personne répond au questionnaire".

D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(R) = 0,25$ et $\mathbb{P}_R(Q) = 0,3$. Ainsi, La probabilité qu'une personne prise au hasard réponde à l'appel puis au questionnaire vaut $\mathbb{P}(R \cap Q) = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(Q) = 0,3 \times 0,25 = 0,075$.

2.1 Construction d'un arbre pondéré

Propriété 3 — Règle de la somme : Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités issues d'un nœud est égale à 1.

■ **Exemple 13 :** On considère une succession de deux expériences aléatoires dont l'arbre pondéré associé est représenté ci-dessous.



- Sur cet arbre, on voit que $\mathbb{P}(A) = 0.3$ et $\mathbb{P}(C) = 0.6$.
- Puisque la somme des probabilités issues d'une branche vaut 1, on a $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$, soit $\mathbb{P}(B) = 0.1$.
- La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(D)$ se lit sur la branche qui relie A à D. Ainsi, $\mathbb{P}_A(D) = 0.8$.
- La somme des probabilités issues du nœud C doit valoir 1.
On a donc $\mathbb{P}_C(D) + \mathbb{P}_C(E) + \mathbb{P}_C(F) = 1$. Ainsi, $\mathbb{P}_C(D) = 0.3$.

■

Cette règle traduit le fait que l'on construit l'arbre en découpant l'univers selon des événements disjoints. Ici, $A \cap B = \emptyset$.

Propriété 4 — Règle du produit : Dans un arbre pondéré la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités du chemin aboutissant à cette issue

■ **Exemple 14 :** Pour obtenir l'issue $A \cap D$, on passe par les sommets A puis D.

On a alors $\mathbb{P}(A \cap D) = 0.3 \times 0.8 = 0.24$.

■

On retrouve la relation $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(D)$.

2.2 Formule des probabilités totales

Définition 9 — Partition : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

On dit que les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de Ω lorsque

- Les ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont non vides
- Les ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont deux à deux disjoints
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

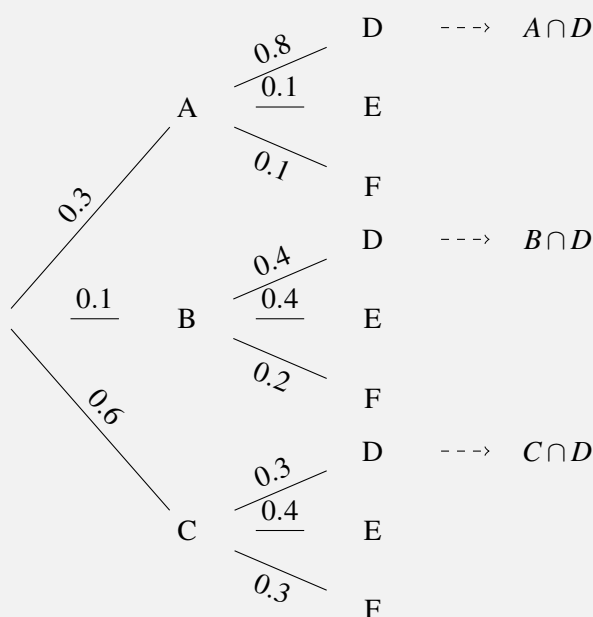
Dans le cadre des probabilités, on parle également de **système complet d'événements**.

■ **Exemple 15 :** On considère $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ ainsi que les événements $A_1 = \{1; 3\}$, $A_2 = \{2; 4; 5; 6; 7\}$ et $A_3 = \{8\}$. A_1, A_2 et A_3 forment une partition de Ω . ■

Propriété 5 — Formule des probabilités totales : On considère un événement B et une partition $A_1, A_2, \dots, A_n$ de l'univers Ω . Alors,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \dots + \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

■ **Exemple 16 :** On reprend l'exemple de la partie précédente. On souhaite calculer la probabilité $\mathbb{P}(D)$. Pour cela, on regarde l'ensemble des branches qui contiennent l'événement D .



- A, B et C forment une partition de Ω .
- On a $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A \cap D) + \mathbb{P}(B \cap D) + \mathbb{P}(C \cap D)$. De plus,
 - $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}_A(D) \times \mathbb{P}(A) = 0.8 \times 0.3 = 0.24$
 - $\mathbb{P}(B \cap D) = \mathbb{P}_B(D) \times \mathbb{P}(B) = 0.4 \times 0.1 = 0.04$
 - $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}_C(D) \times \mathbb{P}(C) = 0.6 \times 0.3 = 0.18$
- Ainsi, $\mathbb{P}(D) = 0.24 + 0.04 + 0.18 = 0.46$. ■

1. Exercices

► Exercice 1

Dans un collège de 500 élèves, 60% sont des filles. 80 % d'entre elles sont droitières. On sait également que 15% des garçons sont gauchers.

1. Compléter le tableau suivant avec les **effectifs**.

	Gauchers	Droitières	Total
Garçons			
Filles			
Total			

2. On interroge au hasard un élève, de manière équiprobable
 - (a) Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?
 - (b) Quelle est la probabilité que cet(te) élève soit droitier(e) ?
 - (c) Quelle est la probabilité que l'élève soit un garçon gaucher ?

► Exercice 2

Face à la pénurie de volontaires pour passer au tableau, le professeur va en désigner un au hasard, de manière équiprobable. On sait que la classe est composée de 35 élèves dont 19 filles. De plus, 6 filles et 8 garçons n'ont pas fait leur exercice.

1. Compléter le tableau suivant

	Garçons	Filles
Exo fait		
Exo non fait		

On appelle F l'événement "l'élève interrogé est une fille" et E l'événement "l'élève interrogé a fait son exercice".

2. Décrire par une phrase les événements $\bar{F}$, $\bar{E}$, $F \cap E$. Déterminer la probabilité de ces événements.

► Exercice 3

120 personnes atteintes d'une maladie ont accepté de servir de cobaye pour tester l'efficacité d'un nouveau médicament. Dans ces personnes, 75% ont reçu le véritable traitement. Les personnes restantes ont reçu un placebo (un "faux" traitement). Les deux tiers des personnes ayant pris le médicament ont senti une amélioration. Seules 5 personnes ayant reçu le placebo sont dans ce cas.

1. Compléter le tableau suivant à l'aide des effectifs.

	Traitement	Placebo	Total
Amélioration			
Pas d'amélioration			
Total			

2. On sélectionne uniformément au hasard une des personnes de ce test. On note T l'événement "le patient a reçu le traitement" et A l'événement "le patient a constaté une amélioration de sa santé".
 - (a) Décrire par une phrase l'événement $T \cap A$. Que vaut $\mathbb{P}(T \cap A)$?
 - (b) Que valent $\mathbb{P}_T(A)$ et $\mathbb{P}_{\bar{T}}(A)$?
 - (c) Que vaut $\mathbb{P}_A(\bar{T})$?
 - (d) Le médicament vous semble-t-il efficace ? Justifier.

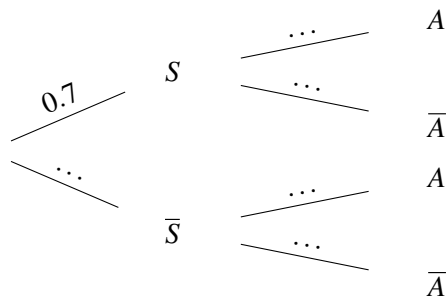
► Exercice 4

Le filtre anti-spam des boîtes mails utilise les probabilités conditionnelles pour déterminer si, oui ou non, le mail reçu est indésirable. Pour cela, le filtre va, par exemple, analyser les mots du mail et rechercher certains mots-clés apparaissant souvent dans les spams.

Nous étudions une version très simplifiée : on note A l'événement "le mot Argent figure dans le mail" et S l'événement "le mail est un spam". Le courrier est classé en indésirable si $\mathbb{P}_A(S) \geq 0.9$.

On suppose que 70% des spams contiennent le mot argent, que 20% des non-spams contiennent le mot argent.

1. D'après l'énoncé, que valent $\mathbb{P}_S(A)$ et $\mathbb{P}_{\bar{S}}(A)$?

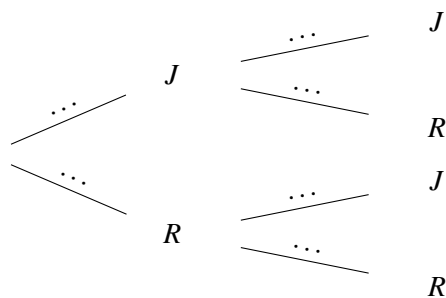


2. On suppose que 70% des mails sont des spams. Compléter l'arbre de probabilités ci-contre.
3. Que valent $\mathbb{P}(A \cap S)$ et $\mathbb{P}(A \cap \bar{S})$? En déduire $\mathbb{P}(A)$.
4. En revenant à la définition des probabilités conditionnelles, calculer $\mathbb{P}_A(S)$. Un mail contenant le mot "argent" est-il considéré comme un spam dans ce modèle ?

► Exercice 5

Dans une urne, on place trois boules jaunes et 7 boules rouges. On tire au hasard, de manière uniforme, une première boule dans l'urne, puis une seconde sans remettre la première boule tirée dans l'urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage ? Au deuxième tirage ?
2. On tire une boule rouge au premier tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au deuxième tirage ?



3. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre. R signifie que la boule tirée est rouge et J que la boule tirée est jaune.
4. Quelle est la probabilité de tirer deux fois une boule jaune ?
5. Quelle est la probabilité de tirer deux boules de la même couleur ?

► Exercice 6

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays. Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7% des habitants sont infectés par cette maladie. Parmi les individus infectés, 20% sont déclarés négatifs. Parmi les individus sains, 1% sont déclarés positifs. Une personne est choisie au hasard dans la population.

On note

- M l'événement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T l'événement : « le test est positif »

- Construire un arbre pondéré modélisant la situation
- (a) Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée et que son test soit positif ?
(b) Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,0653.
- On sait que le test de la personne choisie est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ? On donnera le résultat sous forme approchée à 0.01 près.

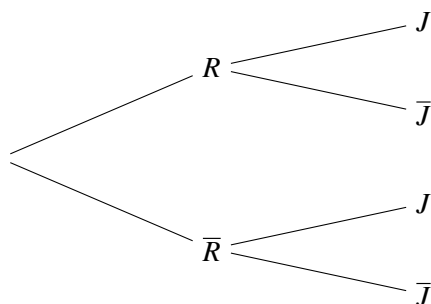
► Exercice 7

D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17% de la population française. Parmi ces utilisateurs réguliers, 32% sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.

On interroge une personne au hasard et on note :

- R : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- J : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré modélisant cette situation



2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(R \cap J)$
3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11% de la population française. Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3} près.
4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun. On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.

► Exercice 8

Dans une école de statistiques, le recrutement se fait de deux façons :

- 10% des candidats sont sélectionnés sur leur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60% d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20% d'entre eux sont admis à l'école.

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On note

- D l'événement : « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'événement : « le candidat a été admis à l'école ».

1. Traduire la situation par un arbre pondéré
2. Calculer la probabilité qu'un candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école
3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,24
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné initialement ?