

Variables aléatoires discrètes

1 Notion de variable aléatoire

Définition 1 : On considère une expérience aléatoire d'univers Ω .

Définir une variable aléatoire réelle X sur Ω , c'est associer un réel à chaque issue de cet univers Ω .

■ **Exemple 1 :** On sélectionne au hasard un étudiant en France. L'univers de cet expérience est donc l'ensemble des étudiants de France.

Pour chaque étudiant, je demande alors combien de fois il se rend au cinéma par mois : on définit alors une variable aléatoire sur l'ensemble des étudiants. ■

Définition 2 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers Ω et a un réel.

On note $\{X = a\}$ l'événement qui regroupe toutes les issues ω de Ω telle que $X(\omega) = a$.

On peut définir de la même manière les événements $\{X < a\}$, $\{X \leq a\}$, $\{X \geq a\}$...

■ **Exemple 2 :** Dans l'exemple précédent, l'événement $\{X = 3\}$ représente l'ensemble des étudiants qui vont exactement 3 fois au cinéma par mois.

L'événement $\{X \leq 2\}$ représente l'ensemble des étudiants qui vont 2 fois ou moins au cinéma par mois. ■

Définition 3 : Soit X une variable aléatoire réelle.

On appelle loi de X la fonction qui à tout réel k associe la probabilité de l'événement $X = k$. On note cette probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.

■ **Exemple 3 :** Le Banco est un jeu de grattage popularisé par la Française des Jeux. Pour un coût de 1 euro, le joueur peut alors remporter jusqu'à 5000 euros. Le gain correspond donc à une variable aléatoire X suit la loi suivante, communiquée par la Française des jeux.

k	0	1	2	5	10	200	5000
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1477471}{3000000}$	$\frac{29417}{250000}$	$\frac{73937}{750000}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{75000}$	$\frac{1}{2000000}$

D'après ce tableau, la probabilité de gagner 10 euros, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = 10)$, vaut $\frac{1}{40}$.

La probabilité de gagner 5 euros ou plus, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X \geq 5)$, vaut $\frac{1}{40} + \frac{1}{50} + \frac{1}{75000} + \frac{1}{2000000}$, soit $\frac{270083}{6000000}$, ce qui vaut environ 0.045. ■

Définition 4 : Soit X une variable aléatoire réelle. On note $k_1, k_2, \dots, k_n$ les valeurs prises par la variable aléatoire X .

On appelle espérance de X , notée $E[X]$, la quantité suivante

$$E[X] = k_1 \mathbb{P}(X = k_1) + k_2 \mathbb{P}(X = k_2) + \dots + k_n \mathbb{P}(X = k_n)$$

L'espérance désigne la « valeur moyenne » prise par la variable aléatoire X .

■ **Exemple 4 :** Reprenons l'exemple précédent : l'espérance de la variable aléatoire X vaut

$$E[X] = 0 \times \frac{1477471}{3000000} + 1 \times \frac{29417}{250000} + 2 \times \frac{73937}{750000} + 5 \times \frac{1}{40} + 10 \times \frac{1}{50} + 200 \times \frac{1}{75000} + 5000 \times \frac{1}{2000000} = 0.645$$

Cela signifie qu'en moyenne, sur un ticket de Banco, on gagne 0.645 euro. Le coût du ticket étant de 1 euro, le jeu du Banco est donc défavorable au joueur. ■

Définition 5 : Soit X une variable aléatoire réelle. La variance de X , notée $Var(X)$ est égale à $E[(X - E(X))^2]$. L'écart-type de X , noté $\sigma(X)$, est égal à $\sigma(X)$.

La variance et l'écart-type permettent de quantifier l'écart moyen d'une variable aléatoire par rapport à son espérance.

2 Loi de variables aléatoires classiques

2.1 Loi binomiale

Définition 6 : On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p si cette variable comptabilise le nombre de "succès" d'une répétition de n épreuves identiques et indépendantes, dont la probabilité de succès vaut p .

On écrira $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

■ **Exemple 5 :** On lance une pièce de monnaie équilibrée six fois de suite et on note X le nombre de fois où elle tombe sur Pile. Le succès que l'on considère ici est "La pièce tombe sur Pile". L'expérience est réalisée 6 fois et la probabilité de succès à chaque expérience est de $\frac{1}{2}$. Enfin, les épreuves sont indépendantes.

Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{1}{2}$. ■

■ **Exemple 6 :** En France, 87% de la population possède un smartphone. On interroge uniformément au hasard 1000 personnes différentes. Bien que ce ne soit pas tout à fait le cas, on suppose que, du fait que le nombre de personnes tirées au hasard est très petit comparé à la population totale, ces tirages peuvent être considérés comme indépendant et de même loi.

On note X le nombre de personnes possédant un smartphone parmi les 1000 personnes interrogées. X suit une loi binomiale de paramètres 1000 et 0.87. ■

Propriété 1 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p .

$$\text{Alors } \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

■ **Exemple 7 :** On lance 10 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On note X la variables aléatoire qui comptabilise le nombre de 6 obtenus. X suit donc une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir exactement 2 fois le nombre 6 est $\mathbb{P}(X = 2)$ et vaut $\binom{10}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{10-2}$ soit environ 0.29. ■

Propriété 2 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p . On a alors

$$E[X] = np \quad \text{Var}(X) = np(1-p) \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

■ **Exemple 8 :** On reprend l'exemple précédent : soit X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de personnes équipées de smartphones parmi les 1000 personnes interrogées. On rappelle que X suit une loi binomiale de paramètres 1000 et 0.87.

L'espérance de X vaut $1000 \times 0.87 = 870$. En moyenne, 870 personnes auront un smartphone parmi les 1000 interrogées.

La variance de X vaut $1000 \times 0.87 \times (1 - 0.87) = 113.1$ et son écart-type vaut $\sqrt{113.1} \simeq 10.6$.

Cela signifie qu'il y a de très fortes chances que la différence entre le nombre réel de personnes possédant un smartphone parmi les 1000 interrogés et l'espérance soit inférieure à 10.6. ■

2.2 Loi de Poisson

L'inconvénient de la loi binomiale est que le calcul de probabilités liées à cette loi fait potentiellement intervenir des nombres très grands (les coefficients binomiaux) et d'autres très petits (les puissances), notamment lorsque le nombre d'expérience réalisée est important. A titre d'exemple, si l'on souhaitait calculer $\mathbb{P}(X = 100)$ lors de l'exemple sur les smartphones, on serait alors amené à calculer $\binom{1000}{100}$, qui est un nombre à 140 chiffres...

Fort heureusement dans ces cas, nous avons à disposition une loi qui nous permet d'approcher le comportement de la loi binomiale.

Définition 7 : Soit X une variable aléatoire réelle et λ un réel.

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ si, pour tout entier naturel k , $\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$.

En pratique, la loi de Poisson permet de comptabiliser le nombre d'occurrence d'un événement rare.

Propriété 3 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ .

Alors $E[X] = \lambda$ et $\text{Var}(X) = \lambda$.

Cette proposition implique que, lorsque l'on observe un phénomène dont on connaît l'occurrence moyenne, il est possible de modéliser ce phénomène à l'aide d'une loi de Poisson.

■ **Exemple 9 :** Une compagnie d'assurances estime que, pour un contrat donné, le nombre moyen d'incidents sur 5 ans est de 2.

Soit X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'incidents en 5 ans. Ces événements étant rares, on peut alors supposer que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Nous souhaitons alors déterminer la probabilité d'avoir 5 incidents ou plus. Pour cela, on calcule la probabilité d'avoir 4 incidents ou moins et on prendra alors le complément à 1.

$$\mathbb{P}(X \leq 4) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4)$$

d'où

$$\mathbb{P}(X \leq 4) = \frac{e^{-2}2^0}{0!} + \frac{e^{-2}2^1}{1!} + \frac{e^{-2}2^2}{2!} + \frac{e^{-2}2^3}{3!} + \frac{e^{-2}2^4}{4!} \simeq 0.947$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 4) \simeq 0.053$$

Il y a donc 5.3% de risques d'avoir 5 incidents ou plus en 5 ans. ■

Propriété 4 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p . On suppose que les trois conditions suivantes sont réunies :

$$n \geq 30 \quad p \leq 0.1 \quad np < 10$$

Alors X peut être approchée par une variable aléatoire de Poisson de paramètre np .

■ **Exemple 10 :** On considère une chaîne de fabrication dont on sait que 5% des pièces produites sont défectueuses. On prélève 120 pièces dans le stock produit. Le stock est assez grand pour que ce tirage soit assimilé à des tirages indépendants avec remise. On note X le nombre de pièces défectueuses ainsi prélevées.

X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 120$ et $p = 0.05$. Son espérance vaut $np = 120 \times 0.05 = 6$.

Nous sommes bien dans les conditions d'approximation par une loi de Poisson, de paramètre 6.

$$\text{Ainsi, } \mathbb{P}(X = 5) \simeq \frac{e^{-6} \times 6^5}{5!} \simeq 0.1606$$

En calculant à l'aide de la loi binomiale, on aurait trouvé $\mathbb{P}(X = 5) \simeq 0.1634$. ■

3 Les exercices

► Exercice 1

Une compagnie d'assurance souhaite réévaluer ses tarifs pour s'assurer un minimum de profits. En consultant les données statistiques à sa disposition, celle-ci a pu établir les constats suivants

- La probabilité qu'un client ne lui coûte aucune indemnisation par an est de 0.45.
- La probabilité qu'un client lui coûte une indemnisation de 200 euros par an est de 0.15.
- La probabilité qu'un client lui coûte une indemnisation de 1000 euros par an est de 0.25.
- La probabilité qu'un client lui coûte une indemnisation de 2000 euros par an est de 0.1.
- La probabilité qu'un client lui coûte une indemnisation de 5000 euros par an est de 0.05.

On note X la variable aléatoire égale à l'indemnisation annuelle d'un client sélectionné uniformément au hasard.

1. Résumer la loi de X dans un tableau et vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1000)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Calculer $E[X]$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. La compagnie souhaite générer un profit annuel moyen de 100 euros par client. A combien doit-elle fixer sa cotisation annuelle pour atteindre cet objectif ?

► Exercice 2

Un étudiant n'ayant pas révisé est confronté à un devoir sous la forme d'un questionnaire. Pour chaque question, une seule proposition est exacte parmi les cinq proposées. L'étudiant répond uniformément au hasard au 20 questions de l'exercice. On note X le nombre de bonnes réponses obtenues.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? On précisera ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité que l'étudiant ait tout faux ? Tout juste ?
3. Quelle est l'espérance de X ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

► Exercice 3

Un agent immobilier a estimé que la probabilité de vendre un appartement suite à une visite est de 8%. Il effectue en moyenne 25 visites par semaine. On considère que les visites et les potentielles ventes qui en résultent sont indépendantes les unes des autres.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'appartement vendus en une semaine.

1. Quelle est la loi de X ? Préciser ses paramètres.
2. Calculer, à 10^{-4} près, la probabilité que l'agent réalise 8 ventes. On donne $\binom{25}{8} = 1051575$.
3. Calculer, à 10^{-4} près, la probabilité que l'agent réalise au moins une vente.
4. Combien l'agent vend-il d'appartement en moyenne par semaine ?
5. Calculer $\sigma(X)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

► Exercice 4

On admet que le nombre d'accidents survenant sur une autoroute quotidiennement est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.

1. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas d'accident un jour donné ?
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins deux accidents lors d'un jour donné ?

► Exercice 5

La variable aléatoire X donnant le nombre de clients se présentant au guichet d'un bureau de poste par intervalle de temps de durée 10 minutes, entre 14 h 30 et 16 h 30, suit la loi de Poisson de paramètre 5.

1. Donner l'espérance de X et interpréter dans le contexte de l'exercice.
2. Calculer la probabilité que, sur une période de 10 minutes choisie au hasard entre 14 h 30 et 16 h 30 un jour d'ouverture du guichet, il y ait au moins 8 personnes à se présenter à ce guichet.

► Exercice 6

Un autre agent immobilier effectue 100 visites par mois, avec les mêmes probabilités de vente et hypothèses d'indépendance que le deuxième exercice. On note Y le nombre de visites aboutissant à une vente.

1. Quelle est la loi de Y ? On précisera ses paramètres.
2. Rappeler les conditions d'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.
3. En déduire que l'on peut approcher la variable Y par une variable de Poisson Z de paramètre à préciser.
4. A l'aide de cette approximation, donner une estimation de la probabilité pour l'agent de réaliser exactement 10 ventes en un mois.

► Exercice 7

On a répertorié dans une usine le nombre d'accidents mineurs subis par le personnel dans une journée de travail sur une période de 200 jours. Ces accidents sont survenus indépendamment les uns des autres. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Nombre d'accidents	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	86	82	22	7	2	1

1. Quel est le nombre moyen d'accidents par jour ?
2. On souhaite approcher le nombre d'accidents par jour à l'aide d'une loi de Poisson. En quoi cette approche serait pertinente ? Quel serait son paramètre ?
3. Déterminer alors la probabilité théorique d'avoir 2 accidents en un jour et comparer avec la réalité.