

TP01 - Loi binomiale, loi de Poisson

Nom :

Prénom :

Groupe de TP :

1 Calcul de probabilités avec le tableur

Le tableur permet de calculer la loi de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale ou une loi de Poisson dont les paramètres sont connus.

1.1 Si X suit une loi binomiale

On note n et p les paramètres de la loi binomiale

- La commande **=LOI.BINOMIALE(k;n;p;FAUX)** permet de calculer $\mathbb{P}(X = k)$.
- La commande **=LOI.BINOMIALE(k;n;p;VRAI)** permet de calculer $\mathbb{P}(X \leq k)$
- Si l'on souhaite calculer $\mathbb{P}(X \geq k)$, il suffit d'utiliser la relation $\mathbb{P}(X \geq k) = 1 - \mathbb{P}(X \leq k - 1)$.

Par exemple, si X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0.5, la commande **=LOI.BINOMIALE(7;10;0,5;FAUX)** permet de calculer $\mathbb{P}(X = 7)$.

La commande **=LOI.BINOMIALE(6;10;0,5;VRAI)** permet de calculer $\mathbb{P}(X \leq 6)$.

Si l'on souhaite calculer $\mathbb{P}(X \geq 4)$, on utilisera **=1-LOI.BINOMIALE(3;10;0,5;VRAI)**.

► Exercice 1

On suppose que la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0.4$. A l'aide du tableur, déterminer les probabilités suivantes, en arrondissant les résultats 4 chiffres après la virgule.

$$\mathbb{P}(X = 7) =$$

$$\mathbb{P}(X \leq 5) =$$

$$\mathbb{P}(X \geq 6) =$$

1.2 Si X suit une loi de Poisson

On note L le paramètre de la loi de Poisson.

- La commande **=LOI.POISSON(k;L;FAUX)** permet de calculer $\mathbb{P}(X = k)$.
- La commande **=LOI.POISSON(k;L;Vrai)** permet de calculer $\mathbb{P}(X \leq k)$
- Si l'on souhaite calculer $\mathbb{P}(X \geq k)$, il suffit d'utiliser la relation $\mathbb{P}(X \geq k) = 1 - \mathbb{P}(X \leq k - 1)$.

Par exemple, si X suit une loi de Poisson de paramètre $L = 3$, la commande **=LOI.POISSON(5;3;FAUX)** permet de calculer $\mathbb{P}(X = 5)$. La commande **=LOI.POISSON(7;3;VRAI)** permet de calculer $\mathbb{P}(X \leq 7)$.

Si l'on souhaite calculer $\mathbb{P}(X \geq 10)$, on utilisera **=1-LOI.POISSON(9;3;VRAI)**

► Exercice 2

On suppose que la variable X suit une loi de Poisson de paramètre 4. A l'aide du tableur, déterminer les probabilités suivantes, en arrondissant les résultats 4 chiffres après la virgule.

$$\mathbb{P}(X = 4) =$$

$$\mathbb{P}(X \leq 6) =$$

$$\mathbb{P}(X \geq 2) =$$

1.3 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

L'objectif est de visualiser sur un exemple le théorème du cours suivant

Propriété 1 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p . On suppose que les trois conditions suivantes sont réunies :

$$n \geq 30 \quad p \leq 0.1 \quad np < 10$$

Alors X peut être approchée par une variable aléatoire de Poisson de paramètre np .

On considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0.05$.

On a alors $np = 2$: on considère donc une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre 2.

Pour comparer ces deux variables, nous allons utiliser le tableau.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1				k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	n	40		P(X=k)																		
3	p	0,05		P(Y=k)																		
4																						
5																						

► Exercice 3

Réalisez les opérations suivants sur une feuille de calcul

- Reproduisez la structure du tableau en faisant en sorte que la première ligne atteigne la valeur de 50 (cellule BC1).
- Dans la cellule E2, entrez la formule **=LOI.BINOMIALE(E1;\$B\$2;\$B\$3;FAUX)**.
- Validez puis étirez le calcul à droite jusqu'à la cellule BC2
- Dans la cellule E3, entrez la formule permettant de calculer $\mathbb{P}(Y = k)$.
- Appeler le professeur pour vérification.

2 Sur-réservation

Une compagnie aérienne dispose d'un avion ayant 200 places. D'après ses statistiques, **la probabilité qu'un passager donné vienne est de 0.95**.

Pour éviter d'avoir des places vides et engendrer un profit maximal, la compagnie décide de vendre **206 billets**, au risque de ne pas avoir assez de place dans l'avion. On suppose que les différentes présences ou absences des passagers sont indépendantes entre elles. Si on note X le nombre de passagers présents à l'embarquement, on peut alors estimer que X suit une loi binomiale.

► Exercice 4

Quels sont les paramètres de la loi X ? Donner également son espérance et son écart-type arrondi 3 chiffres après la virgule.

Paramètre n :

Paramètre p :

Espérance :

Ecart-type :

D'après ce résultat, combien de passagers se présenteront au vol en moyenne ?

En utilisant un écart-type d'écart, donner un intervalle dans lequel le nombre de passagers présents pour l'embarquement se trouvera très souvent.

► **Exercice 5**

A l'aide du tableur, calculez $\mathbb{P}(X \geq 201)$, c'est-à-dire la probabilité que trop de personnes se présentent à l'embarquement.

$$\mathbb{P}(X \geq 201) =$$

On se propose de faire une simulation de la situation à l'aide du tableur. Nous présenterons les résultats sous la forme d'un tableau en faisant une simulation pour 30 vols et 206 passagers potentiels. Le résultat sera similaire au tableau suivant.

Le tableau sera rempli de manière aléatoire : un 1 signifie que le passager s'est bien présenté à l'embarquement pour le vol correspondant, tandis qu'un 0 indique que celui-ci ne s'est pas rendu à son vol.

D2 : X ✓ f_x =SI(ALEA()<\$A\$3;1;0)											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
			Vols								
1			Passagers	1	2	3	4	5	6	7	8
2	Probabilité										
3	de présence										
4	0,95										
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											

► **Exercice 6**

Réalisez les opérations suivantes sur une feuille de calcul.

- Reproduisez la structure du tableau, sans le remplir pour le moment. Le nombre de vols va jusqu'à 30 (cellule AG1) et le nombre de passagers va jusqu'à 206 (cellule C207).
- Dans la cellule D2, entrez la formule **=SI(ALEA()<\$A\$3;1;0)** puis étirez cette formule sur tout le tableau (jusqu'à la cellule AG207). A chaque modification de la feuille de calcul, les résultats du tableau seront actualisés : ce comportement est tout à fait normal.
- Dans la cellule D208, calculez la somme des cellules D2 à D207, puis étirez cette formule à droite jusqu'à la cellule AG208. Cette ligne représente alors le nombre de passagers pour chaque vol.
- Dans la cellule AH208, calculez la moyenne du nombre de passagers par vol. Dans la cellule AH209, calculez l'écart-type empirique (fonction ECARTYPE de Excel). Comparez avec l'espérance et l'écart-type théorique.

Moyenne :

Écart-type :

Observations :

- **Appeler le professeur pour vérification.**

► Exercice 7

Pour cette question, on suppose désormais que la probabilité qu'un passager soit présent est de 0.97. On s'intéresse cette fois au nombre de personnes absentes lors de l'embarquement et on note Y la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de personnes absentes. Y suit de nouveau une loi binomiale.

Préciser les paramètres de Y , son espérance et son écart-type. Calculer alors $\mathbb{P}(Y \leq 5)$ à l'aide du tableur et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Paramètre n :

Paramètre p :

Espérance :

Ecart-type :

$$\mathbb{P}(Y \leq 5) =$$

Interprétation :

► Exercice 8

Vérifier que l'on peut approcher Y à l'aide d'une loi de Poisson Z dont on déterminera le paramètre (voir partie 1.3 pour les conditions d'application).

- Condition 1 :
- Condition 2 :
- Condition 3 :

A l'aide du tableur, donner la valeur de $\mathbb{P}(Z \leq 5)$ et comparer avec le résultat précédent.

$$\mathbb{P}(Z \leq 5) =$$

Observation :

Vous semble-t-il prudent de vendre 206 places dans ce cas ? Proposer un nombre de billets à vendre en justifiant votre démarche.