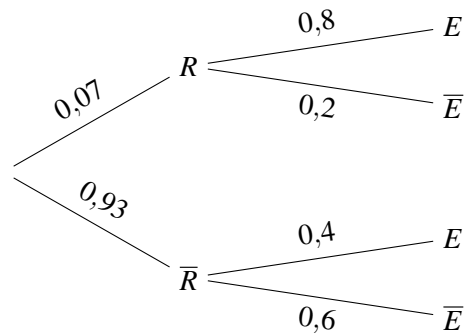


1. Amérique du Nord, 21 mai 2024

Partie A

► **Exercice 1** 1. À l'aide des données de l'énoncé, on peut construire l'arbre pondéré suivant :



On a par ailleurs $P(R \cap E) = P(R) \times P_R(E) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$

2. (R, \bar{R}) forme un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales, $P(E) = P(E \cap R) + P(E \cap \bar{R})$.

Ainsi, $P(E) = 0,056 + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(E) = 0,056 + 0,93 \times 0,4 = 0,428$.

3. On cherche $P_E(R)$. On a $P_E(R) = \frac{P(R \cap E)}{P(E)} = \frac{0,056}{0,428} \simeq 0,131$ à 10^{-3} près.

Partie B

1. X compte le nombre de succès (l'objet est rare) d'un schéma de Bernoulli à 30 épreuves, chacune ayant une probabilité de succès de 0,07. X suit donc une loi binomiale de paramètres 30 et 0,07. Ainsi, $E(X) = 30 \times 0,07 = 2,1$.

2. Puisque X est à valeurs entières, $P(X < 6) = P(X \leq 5)$. D'après la calculatrice, on a $P(X < 6) \simeq 0,984$, arrondi au millième.

3. On a $P(X \geq 2) \simeq 0,631$ et $P(X \geq 3) \simeq 0,351$. L'entier recherché est donc 2. Cela signifie que le joueur à moins de 50% de chances de remporter 3 objets rares ou plus.

4. Notons Y la variable aléatoire qui compte le nombre d'objets rares en N tentatives. Y suit une loi binomiale de paramètres N et 0,07.

On souhaite déterminer N tel que $P(Y \geq 1) \geq 0,95$. Or, $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0)$ car Y est à valeurs entières et positives.

Or, $P(Y = 0) = 0,93^N$. On cherche donc N tel que $1 - 0,93^N \geq 0,95$.

Or, $1 - 0,93^N \geq 0,95$ si et seulement si $-0,93^N \geq -0,05$ soit $0,93^N \leq 0,05$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0; +\infty[$, ceci équivaut à $\ln(0,93^N) \leq \ln(0,05)$ soit $N \ln(0,93) \leq \ln(0,05)$.

Puisque $0 < 0,93 < 1$, il en vient que $\ln(0,93) < 0$.

Ainsi, $1 - 0,93^N \geq 0,95$ si et seulement si $N \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)}$. Or, $\frac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)} \simeq 41,3$. Ainsi, à partir de 42 tirages, la probabilité d'obtenir au moins un objet rare est supérieure ou égale à 0,95.

► **Exercice 2** 1. Le vecteur \vec{AB} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-0 \\ 0-3 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 0 + t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

On peut également remarquer qu'en prenant $t = 0$ pour paramètre dans cette droite, on obtient le point A . Si par ailleurs, on prend $t = 1$, on obtient le point B .

Il est également possible de procéder par élimination. Les droites **a.**, **b.** et **d.** admettant respectivement pour vecteurs directeurs les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, tous trois non colinéaires au vecteur \vec{AB} , il ne peut s'agir des représentations paramétriques de la droite (AB) . Par élimination, la réponse exacte est la réponse **c.**

2. On remarque que M , N et P ont tous les trois 6 comme deuxième coordonnées. Puisque dans la représentation paramétrique de la droite (d) , on a $y = 6t$, cela signifie que le paramètre t vaudrait 1. Or, pour $t = 1$, on trouve $x = 3 + 4 = 7$ et $z = 4 - 2 = 2$, ce qui ne correspond à aucun de ces quatre points. Par élimination, la réponse correcte est la réponse **d.**

Vérifions tout de même. On cherche t tel que $3 + 4t = -3$, $6t = -9$ et $4 - 2t = 7$: la résolution de ces équations nous donnant trois fois la même solution, $t = -\frac{3}{2}$, le point R appartient bien à la droite (d) .

3. La droite (d) admet pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$. La droite (d') admet

pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, les droites (d) et (d') ne peuvent être ni parallèles, ni confondues.

Cherchons alors s'il existe des réels t et k tels que $\begin{cases} 3 + 4t = -2 + 3k \\ 6t = -1 - 2k \\ 4 - 2t = 1 + k \end{cases}$. On a

$$\begin{cases} 3 + 4t = -2 + 3k \\ 6t = -1 - 2k \\ 4 - 2t = 1 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 4t = -2 + 3k \\ 6t = -1 - 2k \\ k = 3 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 4t = -2 + 3(3 - 2t) \\ 6t = -1 - 2(3 - 2t) \\ k = 3 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{5} \\ t = -\frac{7}{2} \\ k = 3 - 2t \end{cases}$$

C'est impossible, de tels réels t et k n'existent pas. Les droites (d) et (d') ne sont donc pas sécantes. Elles sont donc non coplanaires. Réponse **b.**

4. On peut d'emblée vérifier, en remplaçant x , y et z par les coordonnées de I que le point I n'appartient pas aux plans **c.** et **d.**. En revanche, ce point appartient aux plans **a.** et **c.**

Le plan (P) admet pour vecteur normal un vecteur directeur de la droite (d) , en l'occurrence, le vecteur \vec{u} de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$. Le plan **a.** admet pour vecteur normal le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

qui est bien colinéaire à \vec{u} . En revanche, le plan **a.** admet pour vecteur normal le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ qui n'est pas colinéaire à \vec{u} . Par élimination, la bonne réponse est la réponse **a.**

► Exercice 3

Partie A

- $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1. Cette tangente n'est autre que la droite (AB) , dont le coefficient directeur vaut $\frac{-1 - (-4)}{1 - 0} = 3$. Ainsi, $f'(1) = 3$.
Par ailleurs, le point B fournit directement l'ordonnée à l'origine de cette tangente.
L'équation réduite de (T) est donc $y = 3x - 4$.
- f semble concave sur $]0; 1]$ et convexe sur $[1; +\infty[$.
Le point A semble être le point d'inflexion de la courbe C_f .

Partie B

Remarque : Pour cet exercice, il est possible d'utiliser que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = 2x \ln(x) - \frac{1}{x}$.

- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$.
Par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2) = +\infty$. Enfin, par produit et somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
Par ailleurs, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^2) = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$.
Par somme, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.
- (a) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 \times \ln(x^2) + x \times \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \ln(x^2) + 2 + \frac{1}{x^2}$
(b) Pour tout $x > 0$, $f''(x) = \frac{2x}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^2 - 2}{x^3} = \frac{2(x^2 - 1)}{x^3} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$.
- (a) Pour tout $x > 0$, on a $x+1 > 0$ et $x^3 > 0$. $f''(x)$ est donc du signe de $x-1$, qui est négatif sur $]0; 1]$ et positif sur $[1; +\infty[$. f est donc concave sur $]0; 1]$ et convexe sur $[1; +\infty[$.
(b) On peut déterminer les variations de f' à l'aide du signe de f''

| | | | |
|----------|---|-------|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | | - | 0 |
| f' | | ↘ 3 ↗ | |

Ainsi, f admet 3 pour minimum : pour tout $x > 0$, $f'(x) \geq 3 > 0$.
 f est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

- (a) La fonction f est continue sur $]0; +\infty[$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
Puisque $0 \in]-\infty; +\infty[$, d'après le théorème des intermédiaires, il existe un réel $x \in]0; +\infty[$ tel que $f(x) = 0$.
Par ailleurs, la fonction f étant strictement croissante sur cet intervalle, cette solution est unique.
(b) On trouve $\alpha \simeq 1,33$ à 10^{-2} près. Par ailleurs, $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\alpha \ln(\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} = 0$.
Ainsi, $\alpha \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha}$ et donc $\ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2}$.
En appliquant l'exponentielle, on a finalement $\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$.

► **Exercice 4** 1. On a $I_0 = \int_0^\pi \sin(x) dx$.

Une primitive de \sin étant $-\cos$, on a $I_0 = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2$.

2. (a) Pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \in [0; \pi]$, $e^{-nx} > 0$ et $\sin(x) > 0$.

Ainsi, $e^{-nx} \sin(x) > 0$ et donc $I_n \geq 0$.

(b) Pour tout entier naturel n et pour tout réel x , $e^{-(n+1)x} \sin(x) - e^{-nx} \sin(x) = e^{-nx} \sin(x) \times (e^{-x} - 1)$.

Or, pour tout réel $x \in [0; \pi]$, $e^{-x} \leq 1$ et donc $e^{-x} - 1 \leq 0$.

Ainsi, pour tout $x \in [0; \pi]$, on a $e^{-(n+1)x} \sin(x) - e^{-nx} \sin(x) \leq 0$.

Alors $\int_0^\pi (e^{-(n+1)x} \sin(x) - e^{-nx} \sin(x)) dx \leq 0$ soit $\int_0^\pi e^{-(n+1)x} \sin(x) dx - \int_0^\pi e^{-nx} \sin(x) dx \leq 0$.

Finalement, $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

(c) D'après la question 2a, la suite (I_n) est minorée.

D'après la question 2b, la suite (I_n) est décroissante.

Ainsi, la suite (I_n) converge.

3. (a) Pour tout réel x , $\sin(x) \leq 1$.

Ainsi, pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \in [0; \pi]$, $e^{-nx} \sin(x) \leq e^{-nx}$.

En intégrant cette inégalité, on a donc $I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx} dx$.

(b) Une primitive de $x \mapsto e^{-nx}$ est $x \mapsto -\frac{e^{-nx}}{n}$. Ainsi, $\int_0^\pi e^{-nx} dx = \left[-\frac{e^{-nx}}{n} \right]_0^\pi = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$.

(c) Ainsi, pour tout entier naturel n , $0 \leq I_n \leq \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-n\pi}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$.

D'après le théorème d'encadrement, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

4. (a) On rappelle que $I_n = \int_0^\pi e^{-nx} \sin(x) dx$.

D'une part, pour tout réel $x \in [0; \pi]$, on pose $\begin{cases} u(x) = e^{-nx} & u'(x) = -ne^{-nx} \\ v(x) = -\cos(x) & v'(x) = \sin(x) \end{cases}$

D'après la formule d'intégration par parties,

$$I_n = [-e^{-nx} \cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi (-ne^{-nx}) \times (-\cos(x)) dx = 1 + e^{-n\pi} - n \int_0^\pi e^{-nx} \cos(x) dx = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n$$

D'autre part, pour tout réel $x \in [0; \pi]$, on pose $\begin{cases} w(x) = \sin(x) & w'(x) = \cos(x) \\ p(x) = -\frac{e^{-nx}}{n} & p'(x) = e^{-nx} \end{cases}$

D'après la formule d'intégration par parties,

$$I_n = \left[-\frac{e^{-nx}}{n} \sin(x) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(-\frac{e^{-nx}}{n} \right) \cos(x) dx = 0 - 0 + \frac{1}{n} \int_0^\pi e^{-nx} \cos(x) dx = \frac{1}{n} J_n$$

(b) On a donc $I_n = \frac{1}{n} J_n$ donc $J_n = nI_n$. Or, $I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n = 1 + e^{-n\pi} - n^2 I_n$.

Ainsi, $(n^2 + 1)I_n = 1 + e^{-n\pi}$ et finalement $I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{1 + n^2}$

```

51 from math import *
52 def seuil():
53     n = 0
54     I = 2
55     while I >= 0.1:
56         n = n+1
57         I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
58     return n

```