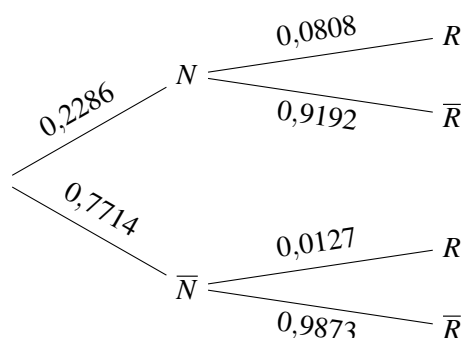


1. Amérique du Nord, 22 mai 2024

Partie A

► **Exercice 1** 1. À l'aide des données de l'énoncé, on peut construire l'arbre pondéré suivant :



2. On a $P(N \cap R) = P(N) \times P_N(R) = 0,2286 \times 0,0808 \simeq 0,0185$ à 10^{-4} près.

3. $(N, \bar{N})$ forme un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales, $P(R) = P(R \cap N) + P(R \cap \bar{N})$.

Ainsi, $P(R) = P(N) \times P_N(R) + P(\bar{N}) \times P_{\bar{N}}(R) = 0,2286 \times 0,0808 + 0,7714 \times 0,0127 \simeq 0,283$ à 10^{-4} près.

4. On cherche $P_R(N)$. On a $P_R(N) = \frac{P(R \cap N)}{P(R)} = \frac{0,2286 \times 0,0808}{0,2286 \times 0,0808 + 0,7714 \times 0,0127} \simeq 0,6534$ à 10^{-4} près.

Partie B

1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,65$.

2. On a $P(X = 325) = \binom{500}{325} \times 0,65^{325} \times (1 - 0,65)^{175} \simeq 0,0374$ à 10^{-4} près.

3. On a $P(X \geq 325) = 1 - P(X < 325) = 1 - P(X \leq 324)$ puisque X est à valeurs entières.

D'après la calculatrice, on a alors $P(X \geq 325) \simeq 0,5206$.

La probabilité pour qu'au moins 325 véhicules soient neufs parmi les 500 véhicules choisis est d'environ 0,5206.

Partie C

1. La probabilité qu'un véhicule choisi au hasard soit d'occasion est de $1 - 0,65 = 0,35$.

Puisque l'on assimile le choix des n véhicules à des tirages avec remise (on suppose donc l'indépendance des résultats), on a $p_n = (1 - 0,65)^n = 0,35^n$.

2. On a $q_n = 1 - p_n = 1 - 0,35^n$.

Or, $1 - 0,35^n \geq 0,9999$ si et seulement si $-0,35^n \geq -0,0001$ soit $0,35^n \leq 0,0001$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0; +\infty[$, ceci équivaut à $\ln(0,35^n) \leq \ln(0,0001)$ soit $n \ln(0,35) \leq \ln(0,0001)$ ou encore $n \geq \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,35)}$. Or, $\frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,35)} \simeq 8,77$. L'entier recherché est donc 9.

► **Exercice 2** 1. On a $F(3;0;1)$, $H(0;1;1)$ et $M\left(\frac{3}{2};1;0\right)$.

2. (a) Les points F , M et H n'étant pas alignés, ces trois points définissent bien un plan.

On a $\overrightarrow{FH} \begin{pmatrix} 0-3 \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{FH} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, on a $\overrightarrow{FM} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}-3 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{FM} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi,

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{FH} = 2 \times -3 + 6 \times 1 + 3 \times 0 = 0$

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{FM} = 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 6 \times 1 + 3 \times (-1) = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (FHM) , ce vecteur $\vec{n}$ est donc normal au plan (FHM) .

(b) Une équation cartésienne du plan (FHM) est donc $2(x-3) + 6(y-0) + 3(z-1) = 0$. En développant, on obtient bien l'équation $2x + 6y + 3z - 9 = 0$.

(c) Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. Or, ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{n}$ car les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles. Le plan $\mathcal{P}$ et le plan (FHM) ne sont donc pas parallèles.

3. Le point D a pour coordonnées $(0;1;0)$ et le vecteur $\overrightarrow{DG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une représentation

paramétrique de la droite (DG) est donc $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

4. Cherchons x , y , z et t tels que $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 2x + 6y + 3z - 9 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 2x + 6y + 3z - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 2 \times 3t + 6 \times 1 + 3 \times t - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 9t - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{3} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Les coordonnées du point N sont $\left(1;1;\frac{1}{3}\right)$.

5. Le point R est le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) si et seulement si R appartient au plan (HMF) et le vecteur $\overrightarrow{RG}$ est normal au plan (HMF) .

Or, le vecteur $\overrightarrow{RG}$ a pour coordonnées, $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{n}$, qui lui est un

vecteur normal au plan (HMF) . Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{RG}$ n'est pas normal au plan (HMF) et le point R n'est pas le projeté orthogonal de G sur ce plan. (on peut toutefois vérifier que le point R appartient bien à ce plan).

► **Exercice 3** 1. La fonction g est dérivable sur $[0; 1]$ et pour tout réel $x \in [0; 1]$, $g'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x)$. Or, si $x \in [0; 1]$, alors $1 - x \geq 0$. Ainsi, pour tout $x \in [0; 1]$, on a $g'(x) \geq 0$. La fonction g est donc croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

De plus, la dérivée g' ne s'annulant qu'en 1, la fonction g est même strictement croissante sur cet intervalle.

Par ailleurs, $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

2. On a $u_1 = 2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et $u_2 = 2 \times \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$.

3. Pour tout entier naturel n , on pose $P(n)$: « $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ »

- Initialisation : On a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{3}{4}$. Ainsi, $0 < u_0 < u_1 < 1$. $P(0)$ est donc vraie.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a donc $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

On applique la fonction g qui est strictement croissante sur $[0; 1]$ à cette inégalité.

On a alors $g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1)$.

Or, $g(0) = 0$, $g(u_n) = u_{n+1}$, $g(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $g(1) = 1$. Ainsi, on a bien $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$. $P(n+1)$ est donc vraie.

- Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

4. D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 1. La suite (u_n) est donc convergente.

5. Pour tout entier naturel n , $u_n \in [0; 1]$. De plus, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = g(u_n)$ et la fonction g est continue sur $[0; 1]$.

Ainsi, on a $g(\ell) = \ell$, soit $2\ell - \ell^2 = \ell$. Cette équation possède deux solutions qui sont 0 et 1.

Or, la suite (u_n) est croissante et son premier terme vaut $\frac{1}{2}$ qui est strictement supérieur à 0.

Il n'est pas possible que $\ell = 0$. On a donc $\ell = 1$.

6. Pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = \ln(1 - u_{n+1}) = \ln(1 - (2u_n - u_n^2)) = \ln(1 - 2u_n + u_n^2) = \ln((1 - u_n)^2) = 2\ln(1 - u_n) = 2v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \ln(1 - u_0) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$.

7. Pour tout entier naturel n , on a donc $v_n = -\ln(2) \times 2^n$.

8. Pour tout entier naturel n , $v_n = \ln(1 - u_n)$ et donc $e^{v_n} = 1 - u_n$ soit $u_n = 1 - e^{v_n} = 1 - \exp(-\ln(2) \times 2^n)$

Or, $2 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\ln(2) \times 2^n) = -\infty$.

Or, $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$. Par composition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(-\ln(2) \times 2^n) = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

9. On peut compléter le programme ainsi :

```
1 def seuil():
2     n=0
3     u=0.5
4     while u<0.95:
5         n=n+1
6         u=2*u-u*u
7     return n
```

► **Exercice 4** 1. On a $f(x) = 0$ si et seulement si $a \ln(x) = 0$ soit $\ln(x) = 0$ et donc $x = 1$. Le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses a pour abscisse 1.

2. D'après les opérations sur les fonctions dérivables, F est dérivable sur $]0; +\infty[$.

De plus, pour tout réel $x > 0$, $F'(x) = a \times \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 \right) = a \ln(x) = f(x)$.

F est donc une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

3. L'aire grisée vaut $\int_1^{x_0} f(x) dx = [F(x)]_1^{x_0} = a(x_0 \ln(x_0) - x_0) - a(1 \times \ln(1) - 1) = a(x_0 \ln(x_0) - x_0) + 1$.

4. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{a}{x}$.

Une équation de T est donc $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, c'est-à-dire $y = \frac{a}{x_0}(x - x_0) + a \ln(x_0)$.

Le point A de cette tangente a pour abscisse 0. Ainsi, le point A a pour coordonnées $(0; -a + a \ln(x_0))$.

Le point B a pour coordonnées $(0; f(x_0))$, c'est-à-dire $(0; a \ln(x_0))$.

La distance AB vaut donc $a \ln(x_0) - (-a + a \ln(x_0)) = a$. Cette distance est donc constante.