1. Cours : Comparaisons des limites

1 Théorèmes de comparaison et d'encadrement

1.1 Théorèmes de comparaison

Théorème 1 — Théorème de comparaison 1 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n). On suppose qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \leqslant v_n$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Il n'y a rien de surprenant ici, si l'on fait preuve d'un brin de logique. Si une suite est plus grande qu'une suite qui devient plus grande que n'importe quel réel, alors elle devient elle-même plus grande que n'importe quel réel.

Démonstration 2 : Soit N un entier naturel tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.

Soit A un réel. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier N' tel que, pour tout entier $n \geqslant N'$, on a $u_n \geqslant A$.

Ainsi, si $n \geqslant N'$ et $n \geqslant N$, on a que $v_n \geqslant u_n \geqslant A$ et par conséquent que $v_n \geqslant A$.

Finalement, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$. □

■ **Exemple 1 :** Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = n + \cos(n)$.

On sait que, pour tout entier naturel n, $\cos(n) \geqslant -1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant n - 1$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$. Les termes de la suite (v_n) sont plus grands que ceux d'une suite qui tend vers $+\infty$, on a donc, par comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$. ■

Théorème 3 — Théorème de comparaison 2 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n). On suppose qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \geqslant v_n$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

Il s'agit d'une version similaire au premier théorème de comparaison : une suite plus petite qu'une suite qui tend vers $-\infty$ tend également vers $-\infty$. La démonstration de ce résultat est d'ailleurs tout à fait similaire.

■ **Exemple 2 :** Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = (\cos(n) - 2)n$.

On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n) \leqslant 1$ et donc $\cos(n) - 2 \leqslant -1$ puis $v_n \leqslant -n$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n) = -\infty$. D'après le théorème de comparaison, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$. ■

Dans les deux exemples précédents, il était possible d'encadrer les termes de la suite dont on souhaitait déterminer la limite. Ainsi, pour ce dernier exemple, on aurait pu préciser que, pour tout entier naturel n, $-3n \leqslant v_n \leqslant -n$. Cet encadrement est tout à fait juste mais seule l'une de ces inégalités (en l'occurrence, celle de droite), permet d'établir la limite de la suite. Être supérieur à une suite qui tend vers $-\infty$ n'a rien d'incroyable, alors qu'être inférieur à une telle suite est plus « exceptionnel ».

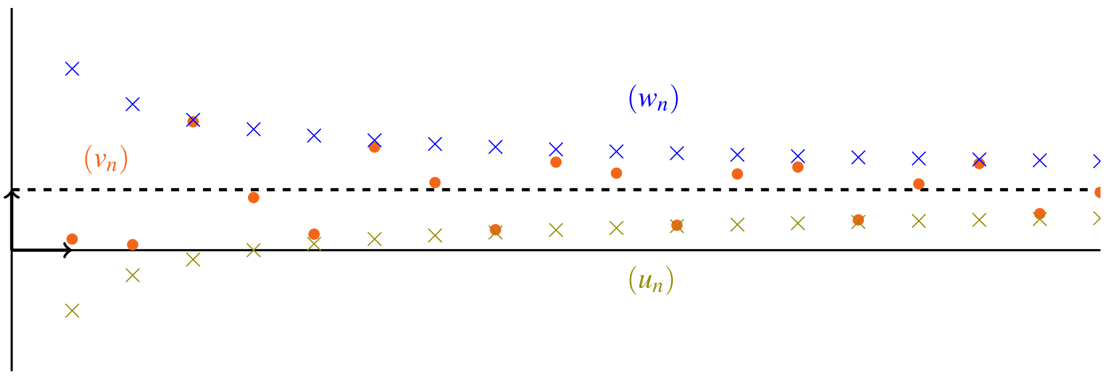
Toutefois, le prochain théorème ne pourra pas se contenter d'une simple inégalité...

1.2 Théorème d'encadrement

Théorème 4 : On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). On suppose qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Si les suites (u_n) et (w_n) sont convergentes et sont **de même limite** ℓ, alors la suite (v_n) est également convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

Illustration : Sur l'exemple suivant, trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont représentées. Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si l'on sait que (u_n) et (w_n) sont convergentes de même limite, on en déduit la convergence et limite de la suite (v_n).



Ce théorème est également appelé « théorème des gendarmes ». Les suites (w_n) et (u_n) jouent ici le rôle des gendarmes qui encerclent leur cible, la suite (v_n). Peu à peu, les gendarmes se dirigent vers la prison. La suite (v_n), encerclée, n'a d'autre choix que de les suivre. D'autres noms plus ou moins évocateurs sont donnés à ce théorème : théorème des carabiniers ou théorème du sandwich par exemple.

Remarquons que ce théorème est avant tout un théorème qui établit la convergence d'une suite ! Encadrer les termes d'une suite par ceux de deux suites convergentes ne garantit pas la convergence de la suite encadrée.

Si toutefois, la suite est convergente, alors la limite de cette suite est comprise (au sens large) entre les limites des suites encadrantes. La convergence doit cependant être établi au préalable.

Démonstration 5 : Notons N l'entier à partir duquel on a, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Notons ℓ la limite commune des suites (u_n) et (w_n). Soit ε un réel strictement positif.

- Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, il existe un entier N_u à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon\,;\,\ell + \varepsilon[$. En particulier, tous ces termes sont supérieurs à $\ell - \varepsilon$.
- Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$, il existe un entier N_w à partir duquel tous les termes de la suite (w_n) sont dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon\,;\,\ell + \varepsilon[$. En particulier, tous ces termes sont inférieurs à $\ell + \varepsilon$.

Notons alors $N_v = \max(N, N_u, N_w)$. Cet entier est supérieur aux trois entiers N, N_u et N_w : les trois propriétés précédentes sont donc vérifiées.

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant N_v$, on a $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$ et en particulier, $\ell - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \ell + \varepsilon$.

Pour tout $n \geqslant N_v$, on a alors $v_n \in]\ell - \varepsilon\,;\,\ell + \varepsilon[$. On a bien montré que la suite (v_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$ □

■ **Exemple 3 :** Pour tout $n > 0$, on pose $u_n = 3 + \dfrac{\cos(n)}{n}$.

On sait que, pour tout entier non nul n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ et donc $3 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{1}{n}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 - \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \dfrac{1}{n}\right) = 3$.

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, la suite (v_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$. ■

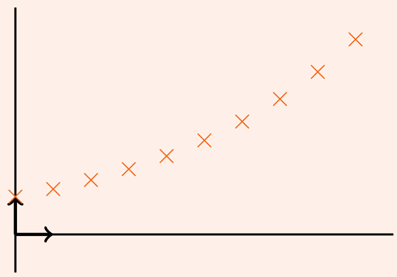
2 Suites géométriques

Propriété 1 — Rappel : Inégalité de Bernoulli : Soit a un réel strictement positif.

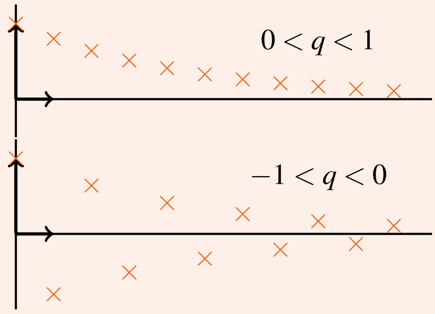
Pour tout entier naturel n, on a $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

Propriété 2 : Soit q un réel. On s'intéresse au comportement de la suite (q^n) selon la valeur de q.

- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.



- Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.



- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Si $q \leqslant -1$, la suite (q^n) n'admet pas de limite.

Démonstration 6 : Traitons séparément les différents cas mentionnés ici :

Premier cas : $q > 1$: Pour tout entier naturel n, $q^n = (1 + (q-1))^n$.

Or, $q - 1 > 0$. Ainsi, d'après l'inégalité de Bernoulli, on a que, pour tout entier naturel n,

$$(1 + (q-1))^n \geqslant 1 + n(q-1)$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + n(q-1)) = +\infty$. Finalement, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Deuxième cas : $-1 < q < 1$

- Si $q = 0$, le résultat est immédiat puisque la suite est constante égale à 0 à partir du rang 1.
- Si $0 < q < 1$, notons $p = \dfrac{1}{q}$. On a alors $p > 1$ et $q^n = \dfrac{1}{p^n}$.
  Or, d'après le point précédent, $\lim\limits_{n\to+\infty} p^n = +\infty$. Ainsi, en prenant l'inverse, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $-1 < q < 0$, alors, pour tout entier naturel n, $0 < |q| < 1$.
  Par ailleurs, pour tout entier naturel n, on a $-|q|^n < q^n < |q|^n$.
  Or, d'après le cas précédent, $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-|q|^n) = 0$.
  D'après le théorème d'encadrement, on a donc également $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Troisième cas : $q \leqslant -1$

Dans ce cas, $q^2 \geqslant 1$.

- D'une part, pour tout entier naturel k, $q^{2k} = (q^2)^k$. Ainsi, $\lim\limits_{k\to+\infty} q^{2k} = +\infty$.
- D'autre part, pour tout entier naturel k, $q^{2k+1} = q \times (q^2)^k$. On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} q^{2k+1} = -\infty$.
- Les termes de rangs pairs de la suite (q^n) tendent vers $+\infty$ et les termes de rangs impairs tendent vers $-\infty$. La suite (q^n) ne peut admettre de limite, finie ou infinie.

□

■ **Exemple 4 :** On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $q = 4$.

Pour tout entier naturel n, on a alors $u_n = -2 \times 4^n$. Or, puisque $4 > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$.

Ainsi, en faisant la limite du produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. ■

■ **Exemple 5 :** Soit q un réel tel que $-1 < q < 1$.

Pour tout entier naturel n, on note $u_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.

D'après ce que l'on sait de l'année de première et du chapitre sur les suites, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Or, puisque $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1-q}$. ■

■ **Exemple 6 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{1-4^n}{2+3^n}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.

On se retrouver avec une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$. Or, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{4^n}{3^n} \times \frac{\frac{1}{4^n}-1}{\frac{2}{3^n}+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \times \frac{\frac{1}{4^n}-1}{\frac{2}{3^n}+1}.$$

Or, puisque $\dfrac{4}{3} > 1$, il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{4^n}-1}{\frac{2}{3^n}+1} = -1$.

Ainsi, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. ■

3 Convergence des suites monotones

3.1 Théorème de convergence

Théorème 7 — Convergence des suites monotones : Soit (u_n) une suite croissante.

- Si la suite (u_n) est majorée par un réel M, alors la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant M$.
- Si la suite (u_n) n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$.

Démonstration 8 — Second point uniquement : Supposons que la suite (u_n) ne soit pas majorée.

Alors, pour tout réel A, il existe un entier N tel que $u_N \geqslant A$. Or, puisque la suite est croissante, ceci implique que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N \geqslant A$, c'est-à-dire $u_n \geqslant A$.
On a montré qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suites sont supérieurs à A, pour n'importe quel réel A. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. □

Attention à ne pas dire, dans le cas où la suite est croissante est majorée par L, que la limite vaut L !
Ce raisonnement peut être mis en défaut assez simplement : si une suite est majorée par L, alors elle l'est aussi par $L+1$, ce qui signifierait qu'elle tendrait aussi vers $L+1$? Le calcul de la limite demandera au moins une étape supplémentaire.

■ **Exemple 7 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 4$. On peut montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et que pour tout entier n, $u_n \leqslant 5$. On admettra ces deux points pour la suite de l'exemple

Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée. D'après le théorème précédent, cette suite est donc convergente. On note alors $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Rappelons que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 4$. Puisque la suite (u_n) est convergente, on peut passer à la limite dans cette égalité. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}u_n + 4\right)$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{5}u_n + 4\right) = \dfrac{1}{5}\ell + 4$.

Ainsi, ℓ est solution de l'équation $\ell = \dfrac{1}{5}\ell + 4$. On a donc $\ell = 5$. ■

Il est important de montrer que la suite converge avant de passer à la limite.

En effet, prenons la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier n, $v_{n+1} = 2v_n + 3$. D'après le même raisonnement, si (v_n) admet pour limite ℓ, alors $\ell = 2\ell + 3$, soit $\ell = -3$... ce qui est absurde : on voit facilement que pour tout entier n, $v_n > 0$. On a même $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$!

Théorème 9 — Convergence des suites monotones : Soit (u_n) une suite décroissante.

- Si la suite (u_n) est minorée par un réel m, alors la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant m$.
- Si la suite (u_n) n'est pas minorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} = -\infty$.

Démonstration 10 : Il suffit de remarquer que si la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors la suite $(-u_n)$ est croissante et majorée. On se retrouve alors dans le cas précédent. □

3.2 Algorithme de seuil

Lorsqu'une suite est strictement monotone, il est courant de rechercher la valeur à partir de laquelle elle dépassera un certain seuil. Il est possible de résoudre un tel problème à l'aide d'une résolution d'équation ou d'un algorithme.

■ **Exemple 8 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 9$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 1$.

On peut montrer, par exemple par récurrence, que cette suite est strictement décroissante et que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$. La suite (u_n) étant décroissante et minorée, on en déduit qu'elle est convergente. Un autre calcul permettra de montrer que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

D'après la définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout $n > N$, on a $u_n \in]2-\varepsilon; 2+\varepsilon[$. La suite (u_n) étant ici décroissante, il suffit de trouver le premier rang n pour lequel $u_n \leqslant 2+\varepsilon$: les termes suivants seront forcément compris entre 2, qui est la limite, et $2+\varepsilon$.

- On commence au rang $n = 0$ et on prend comme valeur initiale de la suite celle de u_0.
- Tant que la valeur actuelle u_n de la suite est supérieure à $2+\varepsilon$ on calcule la valeur suivante de la suite et on incrémente le rang de 1.
- Si la valeur actuelle de u_n est inférieure à $2+\varepsilon$, alors on s'arrête ici et on renvoie la valeur du rang n.

Pseudo-algorithme

```
Variable d'entrée : ε
U = 9
N = 0
Tant que U > 2 + ε
   U ← U/2 + 1
   N ← N + 1
Fin Tant que
Renvoyer N
```

La valeur de n est stockée dans la variable N et celle de u_n est stockée dans la variable U. A chaque étape, le terme suivant de la suite est calculé : N est augmenté de 1 et on applique la relation de récurrence de la suite (u_n) pour mettre à jour la valeur de U. Le programme renvoie alors la première valeur de n telle que u_n n'est pas strictement supérieur à $2+\varepsilon$. On peut alors construire une fonction en Python qui prend en paramètres un réel E positif ou nul et qui renvoie cet entier n.

```python
def seuil(E):
  U = 9
  N = 0
  while U > 2 + E:
    U = U/2 + 1
    N = N + 1
  return N
```

Dans notre cas, l'exécution de l'instruction **seuil(0.001)** renvoie la valeur 13. Cela signifie que u_{13} est le premier terme de la suite inférieur ou égal à 2.001. ■

Cet algorithme peut varier sur certains aspects : on peut par exemple avoir une suite croissante, auquel cas on souhaitera le premier terme supérieur à une valeur donnée. On peut également donner en entrée la valeur à franchir plutôt que la différence entre la limite et les valeurs des termes de la suite. Cependant, la construction d'un tel algorithme est toujours la même.

2. Exercices

Théorèmes de comparaison et d'encadrement

► Exercice 1 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = ((-1)^n - 4)n^2$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant -3n^2$.
2. En déduire la limite de (u_n) en $+\infty$.

► Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sqrt{n^2+1}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant n$.
2. En déduire la limite de u_n en $+\infty$.

► Exercice 3 – Voir le corrigé

A l'aide d'une majoration ou d'une minoration par une autre suite, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = n + 3 \times (-1)^n$

b. $u_n = n\,(\sin(n) - 3)$

c. $u_n = n + \dfrac{\cos(n)}{n}$ pour $n > 0$

d. $u_n = \sin(3n^2+1) - n^3$

► Exercice 4 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + n + 2}{2}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant n$.
3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

► Exercice 5 – Voir le corrigé

A l'aide d'un encadrement par deux suites convergentes, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = \dfrac{3+\sin(n)}{n^3}$ pour $n > 0$

b. $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour $n > 0$

► Exercice 6 – Voir le corrigé

A l'aide d'un encadrement, d'une majoration ou d'une minoration par une autre suite, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = \dfrac{2+\cos(2n)+4\sin(n)}{n}$

b. $u_n = \dfrac{18n^3}{2\sin(n)+3\cos(2n)-9}$

c. $u_n = n^2 - 2\cos(n) + 3\sin(5n+1)$

d. $u_n = \dfrac{n^2+2\cos(n)-5\sin(n)}{3n^2}$

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{6n+2\times(-1)^n}{3n+4\times(-1)^{n+1}}$. Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

► Exercice 8 (Métropole 2024) – Voir le corrigé

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse.

On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1.

Affirmation 1 : La suite (v_n) converge vers un nombre réel ℓ appartenant à l'intervalle $[-1;1]$.

On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et la suite (w_n) est décroissante.

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n, on a alors $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

► Exercice 9 (Métropole 2021) – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
3. En déduire le sens de variations de la suite (u_n) ainsi que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

► Exercice 10 (Métropole 2021) – Voir le corrigé

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}.$$

Dans tout l'exercice, on admet que les suites (u_n) et (v_n) sont **strictement positives**.

1. (a) Calculer u_1 et v_1.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant 1$.
   (c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n+1$.
   (d) En déduire la limite de la suite (u_n).
2. On pose pour tout entier naturel n, $r_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. On admet que $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.
   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{-1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{u_n^2}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.
   (c) En déduire la limite de la suite (r_n^2) puis celle de la suite (r_n).

Suites géométriques

► Exercice 11 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, exprimer u_n en fonction de n puis déterminer, si elle existe, sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

- (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 1.01$ et de premier terme $u_0 = 10^{-54}$.
- (u_n) est la suite géométrique de raison $q = -\sqrt{2}$ et de premier terme $u_n = 42$.
- (u_n) est la suite géométrique de raison $q = \pi - 3$ et de premier terme $u_0 = -1235$.

► Exercice 12 – Voir le corrigé

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

b. $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c. $u_n = -2 \times 4^n$

d. $u_n = 3 + 40 \times \left(-\dfrac{62}{63}\right)^n$

e. $u_n = 3 + 6 \times \left(\dfrac{7}{8}\right)^n$

f. $u_n = \dfrac{3^n}{4^n}$

g.$u_n = 2^n 6^{-n}$

h. $u_n = 3^n - 2^n$

i. $u_n = 2^n + 4^n + \dfrac{1}{2^n}$

j. $u_n = 2 + 5 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

k. $u_n = \dfrac{1 - 2^n}{1 - \dfrac{1}{3^n}}$

l. $u_n = \dfrac{n^n}{18^n}$

► Exercice 13 – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel. On rappelle que pour tout réel q différent de 1,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

A l'aide de cette égalité, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$
2. $u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{3^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$
3. $u_n = 8 + 2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{8}{4^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{8}{4^k}$

► Exercice 14 (Asie 2024) – Voir le corrigé

L'affirmation suivant est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n}$. Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

Soit a et b deux réels positifs. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a^n - b^n$. On distinguera les cas $a < b$, $a = b$ et $a > b$.

Convergence des suites monotones

► Exercice 16 – Voir le corrigé

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et, pour tout entier n, $w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n + 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n \leqslant \frac{3}{2}$.
2. Montrer que la suite (w_n) est croissante.
3. En déduire que la suite (w_n) est convergente et déterminer sa limite.

► Exercice 17 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 14$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$.
3. En déduire que (u_n) est convergente.
4. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $\sqrt{\ell + 2} = \ell$. Déterminer la valeur de la limite ℓ.

► Exercice 18 (Métropole 2022) – Voir le corrigé

Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$. La suite (u_n) est-elle convergente ?

► Exercice 19 – Voir le corrigé

Soit a un réel strictement positif. On définit la suite (u_n) par $u_0 \in]\sqrt{a};+\infty[$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. On considère la fonction f définie pour tout $x \in [\sqrt{a};+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Montrer que f est croissante sur $[\sqrt{a};+\infty[$.
2. Que vaut $f(\sqrt{a})$?
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{a}$.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
5. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $f(\ell) = \ell$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Cette méthode servant à estimer la racine carrée d'un nombre strictement positif se nomme la "Méthode de Héron" et est notamment utilisée dans les calculatrices.

Exercices de synthèse

► Exercice 20 (Suite arithmético-géométrique : découverte guidée) – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 100$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 10.$$

Partie A : Première approche

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. A l'aide d'un tableur, d'un algorithme ou d'une calculatrice, calculer les premiers termes de cette suite. Quelle semble être sa limite ?

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 40$.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
5. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Partie B : Déterminer la limite

1. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 40$. Soit donc n un entier naturel.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1}.
   (b) Rappeler la relation qui lie u_{n+1} et u_n.
   (c) Exprimer u_n en fonction de v_n.
   (d) En combinant les résultats des questions précédentes, montrer que $v_{n+1} = 0.75 v_n$.
2. (v_n) est donc une suite géométrique. Quelle est sa raison ? Que vaut v_0 ?
3. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
4. En rappelant la relation qui lie v_n et u_n, montrer alors que pour tout entier naturel n, $u_n = 40 + 60 \times 0.75^n$.
5. En déduire la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

► Exercice 21 (Suite arithmético-géométrique : moins guidé...) – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = -\frac{2}{3} u_n + 6$$

Pour tout entier naturel n, on pose alors $v_n = u_n - 3.6$.

1. Soit n un entier naturel. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
2. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? On précisera sa raison et son premier terme v_0.
3. Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

► Exercice 22 (Métropole 2021) – Voir le corrigé

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés. Elle sort les gâteaux du congélateur à -19°C et les apporte sur la terrasse où la température ambiante est de 25°C.

On note T_n la température des gâteaux, en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur. Ainsi, $T_0 = -19$. On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \quad T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25).$$

1. Justifier que pour tout entier naturel n, on a $T_{n+1} = 0{,}94 T_n + 1{,}5$.
2. Calculer T_1 et T_2. On donnera des valeurs arrondies au dixième.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n \leqslant 25$. En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible ?
4. Étudier le sens de variations de la suite (T_n).
5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.
6. On pose, pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.
   (a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = -44 \times 0{,}94^n + 25$.
   (c) En déduire la limite de la suite (T_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.
7. (a) Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur. Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.

(b) Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10°C. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.

(c) Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$. Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

```
def seuil():
  n = 0
  T = ...
  while T ... :
    T = ...
    n = n + 1
  return ...
```

► Exercice 23 (Antilles-Guyane 2018) – Voir le corrigé

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000. Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5% de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.
3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -0{,}05(u_n - 1520)$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
   (d) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
4. On désigne par (a_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $a_n = u_n - 1520$.
   (a) Démontrer que la suite (a_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Recopier et compléter la fonction suivante, écrite en Python, pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
def seuil():
  U = 3000
  N = 0
  while ... :
    N = ...
    U = ...
  return ...
```

6. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

▶ Exercice 24 (Polynésie 2013) – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que la suite (u_n) converge.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique, de raison 3.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.
   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

▶ Exercice 25 (Réunion 2023) – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{6u_n+2}{u_n+5}$.

1. Calculer u_1.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel $x \in [0;+\infty[$ par

   $$f(x) = \frac{6x+2}{x+5}.$$

   Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
   (b) En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+5}.$$

   (a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par

   $$v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1}.$$

   (a) Calculer v_0.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.
   (c) Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n). En déduire la limite de (u_n).
5. On considère la fonction Python seuil ci-dessous, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2. Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil (2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```python
def seuil(A):
  n = 0
  u = 8
  while u > A :
    u = (6*u + 2)/(u+5)
    n = n + 1
  return n
```

3. Corrigés

Théorèmes de comparaison et d'encadrement

► Correction 1 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

Ainsi, $-1-4 \leqslant (-1)^n - 4 \leqslant 1-4$, et donc $-5 \leqslant (-1)^n - 4 \leqslant -3$.

En multipliant par n^2 qui est positif, on a $-5n^2 \leqslant u_n \leqslant -3n^2$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (-3n^2) = -\infty$, on a, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

► Correction 2 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on a $n^2+1 \geqslant n^2$. En appliquant la fonction Racine carrée qui est croissante sur $[0;+\infty[$, on a alors $\sqrt{n^2+1} \geqslant \sqrt{n^2}$, c'est-à-dire $u_n \geqslant n$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on a, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

► Correction 3 – Voir l'énoncé

a. Pour tout entier naturel n, $u_n = n + 3 \times (-1)^n$.
Or, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, on a donc $u_n \geqslant n-3$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-3) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ et donc $-4 \leqslant \sin(n) - 3 \leqslant -2$ et finalement $-4n \leqslant u_n \leqslant -2n$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2n) = -\infty$, on a, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

c. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ et donc $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\cos(n)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et finalement $n - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant n + \dfrac{1}{n}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n - \dfrac{1}{n}\right) = +\infty$, on a, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d. Pour tout entier naturel n, $u_n = \sin(3n^2+1) - n^3$. Or, $\sin(3n^2+1) \leqslant 1$. Ainsi, $u_n \leqslant 1 - n^3$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-n^3) = -\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

On a $u_1 = \dfrac{u_0+0+2}{2} = \dfrac{2+0+2}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $u_2 = \dfrac{u_1+1+2}{2} = \dfrac{2+1+2}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n \geqslant n$ ».

- **Initialisation** : On a $u_0 = 1 \geqslant 0$. $P(0)$ est vérifiée.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a alors $u_n \geqslant n$ et donc $u_n + n + 2 \geqslant 2n+2$ soit $u_n + n + 2 \geqslant 2(n+1)$. Finalement, on obtient $\dfrac{u_n+n+2}{2} \geqslant \dfrac{2(n+1)}{2}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant n+1$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

► Correction 5 – Voir l'énoncé

a. Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \dfrac{3+\sin(n)}{n^3}$.
Or, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ d'où $\dfrac{2}{n^3} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{4}{n^3}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n^3} = 0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Or, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ d'où $2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

► Correction 6 – Voir l'énoncé

a. Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \dfrac{2+\cos(2n)+4\sin(n)}{n}$. On a donc $-\dfrac{3}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{7}{n}$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{3}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{n}\right) = 0$. D'après le théorème d'encadrement, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{18n^3}{2\sin(n)+3\cos(2n)-9}$, on a donc $u_n \leqslant \dfrac{18n^3}{-4} = -\dfrac{9}{2}n^3$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{9}{2}n^3\right) = -\infty$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

c. Puisque pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, et $-1 \leqslant \sin(5n+1) \leqslant 1$, on a alors $n^2 - 5 \leqslant u_n \leqslant n^2 + 5$. En particulier, le fait que $u_n \geqslant n^2 - 5$ nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d. Puisque pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, et $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$, on a $\dfrac{1}{3} - \dfrac{7}{3n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{3n^2}$. Par encadrement, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n = \dfrac{6 + 2 \times \dfrac{(-1)^n}{n}}{3 + 4 \times \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}}$.

Or, pour tout entier naturel non nul n, $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. D'après le théorème d'encadrement, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{6}{3} = 2$.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

L'affirmation 1 est fausse. En effet, si l'on pose pour tout entier naturel n, $u_n = -1$, $v_n = (-1)^n$ et $w_n = 1$, alors les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) respectent les conditions de l'énoncé. En revanche, la suite (v_n) ne converge pas (celle-ci vaut successivement -1 puis 1 et n'admet donc pas de limite).

L'affirmation 2 est vraie. En effet, puisque la suite (u_n) est croissante, alors pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant u_{n-2} \geqslant \ldots \geqslant u_1 \geqslant u_0$ et donc, en particulier, $u_n \geqslant u_0$. De la même manière, on peut montrer que, puisque la suite (w_n) est décroissante, on a, pour tout entier naturel n, $w_n \leqslant w_0$.

Finalement, pour tout entier naturel n, on a $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_0$ et donc, en particulier, $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

▶ Correction 9 – Voir l'énoncé

1. On a $u_1 = u_{0+1} = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} + 0 + 1 = \frac{7}{4}$ et
   $u_2 = u_{1+1} = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{41}{16}$.
2. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ ».
   - **Initialisation** : On a $u_0 = 1$. On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 0+1$. $P(0)$ est donc vraie.
   - **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
     En multipliant par $\frac{3}{4}$, on obtient $\frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1)$.
     On ajoute alors $\frac{1}{4}n+1$ et on obtient $\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n + 1$,
     c'est-à-dire, $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4}$. Et puisque $\frac{7}{4} \leqslant 2$, on obtient bien $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - **Conclusion** : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
3. Pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1}$ et donc, en particulier, $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante. Par ailleurs, pour tout entier naturel n, $n \leqslant u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
   D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
4. Pour tout entier naturel non nul n, on a $n \leqslant u_n \leqslant n+1$. On peut alors diviser cette inégalité par n, et on obtient $\frac{n}{n} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{n+1}{n}$, c'est-à-dire $1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$ existe et vaut 1.

▶ Correction 10 – Voir l'énoncé

1. (a) On a $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$ et $v_1 = 2u_0 + v_0 = 2 \times 1 + 1 = 3$.
   (b) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = 2u_n + v_n - v_n = 2u_n$ Or, d'après l'énoncé, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$. La suite (v_n) est donc strictement croissante. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0$ et donc $v_n \geqslant 1$.
   (c) Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n \geqslant n+1$ ».
   - **Initialisation** : On sait que $u_0 = 1$. On a bien $u_0 \geqslant 0+1$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - **Hérédité** : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n \geqslant n+1$. Mais d'après la question précédente, on a aussi que $v_n \geqslant 1$. Ainsi, en sommant ces deux inégalités, on obtient que $u_n + v_n \geqslant n+1+1$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant (n+1)+1$.$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
   - **Conclusion** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   (d) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$. Or, d'après la question précédente, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n+1$. D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. (a) $(-1)^{n+1}$ vaut -1 ou 1, selon la parité de l'entier n. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.
   En divisant par u_n^2, qui est strictement positif, on obtient que $\frac{-1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}$.
   (b) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{u_n^2} = 0$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$ existe et vaut 0.
   (c) Par somme de limite, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n^2 = 2$. Or, la suite (r_n) est strictement positive, puisque

chaque terme est le quotient de deux réels strictement positifs. Il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{r_n^2} = \sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty} r_n^2} = \sqrt{2}$.

Suites géométriques

► Correction 11 – Voir l'énoncé

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 10^{-54} \times 1{,}01^n$. Or, $1{,}01 > 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}01^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. Pour tout entier naturel n, $u_n = 42 \times (-\sqrt{2})^n$. Puisque $-\sqrt{2} < -1$, la suite (u_n) n'admet pas de limite.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -1235 \times (\pi - 3)^n$. Or, $-1 < \pi - 3 < 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\pi-3)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

a. Puisque $-1 < -\dfrac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right) = 0$.

b. Puisque $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.

c. Puisque $4 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

d. Puisque $-1 < -\dfrac{62}{63} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{62}{63}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

e. Puisque $-1 < \dfrac{7}{8} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{8}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + 6 \times \left(\dfrac{7}{8}\right)^n\right) = 3$.

f. Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. Puisque $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$.

g. Pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n 6^{-n} = \dfrac{2^n}{6^n} = \left(\dfrac{2}{6}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

h. Pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n - 2^n = 3^n \times \left(1 - \dfrac{2^n}{3^n}\right) = 3^n \times \left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

i. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2^n + 4^n + \dfrac{1}{2^n}\right) = +\infty$.

j. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + 5 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) = 2$.

k. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - 2^n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right) = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

l. Pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\dfrac{n}{18}\right)^n$. Or, pour $n \geqslant 19$, on a $u_n \geqslant \left(\dfrac{19}{18}\right)^n$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{19}{18}\right)^n = +\infty$. Par comparaison, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

1. Pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = 1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Or, puisque $-1<\frac{1}{2}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

2. Pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{1-\left(\frac{1}{3}^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\left(1-\left(\frac{1}{3}^{n+1}\right)\right)$$

Or, puisque $-1<\frac{1}{3}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$.

3. Pour tout entier naturel n, $u_n = 8\times\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right) = 8\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{32}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

Or, puisque $-1<\frac{1}{4}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{32}{3}$.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on a $\frac{-9^n+3^n}{7^n} = -\frac{9^n}{7^n}+\frac{3^n}{7^n} = -\left(\frac{9}{7}\right)^n+\left(\frac{3}{7}\right)^n$.

Or, puisque $\frac{9}{7}>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{7}\right)^n=+\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\left(\frac{9}{7}\right)^n\right)=-\infty$.

Par ailleurs, puisque $-1<\frac{3}{7}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n=0$.

Ainsi, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-9^n+3^n}{7^n}=-\infty$ et, d'après le théorème de comparaison, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$. L'affirmation est vraie.

► Correction 15 – Voir l'énoncé

Traitons chacun des cas possibles.

- Si $a=b$, tous les termes de la suites valent 0, la suite converge donc vers 0.
- Si $a>b$ (en particulier, $a\neq 0$), pour tout entier naturel n, $u_n=a^n\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$. Or, puisque $a>b\geqslant 0$, cela signifie que $0\leqslant\frac{b}{a}\leqslant 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)=1$ et enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.
- Si $a<b$ (en particulier, $b\neq 0$), pour tout entier naturel n, $u_n=b^n\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n-1\right)$. Or, puisque $0\leqslant a<b$, cela signifie que $0\leqslant\frac{a}{b}\leqslant 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n-1\right)=-1$ et enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

Convergence des suites monotones

► Correction 16 – Voir l'énoncé

1. Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $w_n \leqslant \frac{3}{2}$ ».
   - $w_0 = 1 \leqslant \frac{3}{2}$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
   - Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
     Alors, $w_n \leqslant \frac{3}{2}$. ainsi, $\frac{1}{3}w_n \leqslant \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}u_n + 1 \leqslant \frac{3}{2}$, c'est-à-dire $w_{n+1} \leqslant \frac{3}{2}$. $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{3}w_n + 1 - w_n = -\frac{2}{3}w_n + 1$.
   Or, $w_n \leqslant \frac{3}{2}$ d'où $-\frac{2}{3}w_n \geqslant -1$ et $-\frac{2}{3}w_n + 1 \geqslant 0$, c'est-à-dire $w_{n+1} - w_n \geqslant 0$ ou encore $w_{n+1} \geqslant w_n$. La suite (w_n) est donc croissante. On aurait également pu procéder par récurrence.
3. La suite (w_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{2}$: elle est donc convergente. De plus, puisque pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n + 1$, la limite l de la suite (w_n) doit vérifier $l = \frac{1}{3}l + 1$, c'est-à-dire $l = \frac{3}{2}$.
   Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \frac{3}{2}$.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

1. On a $u_1 = \sqrt{14+2} = \sqrt{16} = 4$.
2. Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 2$ ».
   - **Initialisation :** $u_0 = 16$, $u_1 = 4$. On a bien $u_0 \geqslant u_1 \geqslant 2$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
   - **Hérédité :** Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
     On a $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 2$ et donc $u_n + 2 \geqslant u_{n+1} + 2 \geqslant 4$.
     La fonction Racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $\sqrt{u_n+2} \geqslant \sqrt{u_{n+1}+2} \geqslant \sqrt{4}$ c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant 2$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
   - **Conclusion :** Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.
4. Si $\sqrt{\ell+2} = \ell$, on a $\ell + 2 = \ell^2$ c'est-à-dire $\ell^2 - \ell - 2 = 0$. C'est un polynôme du second degré dont les racines sont 2 et -1. Or, puisque pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$, la seule possibilité de limite est 2.

► Correction 18 – Voir l'énoncé

Puisque pour tout entier naturel non nul n, on a $\frac{1}{n} \leqslant 1$, alors, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. La suite (u_n) est donc croissante et majorée. Elle est donc convergente.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

1. f est dérivable sur $[\sqrt{a}; +\infty[$ et, pour tout réel x dans cet intervalle, $f'x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2}$.
   Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x^2 > a$. a étant positif et puisque $x \in [\sqrt{a}; +\infty[$, on a bien $f'(x) \geqslant 0$.
   La fonction f est croissante sur $[\sqrt{a}; +\infty[$.
2. Par ailleurs, $f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{a}) = \sqrt{a}$.

3. Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition $u_n \geqslant \sqrt{a}$.
   - Par hypothèse, $u_0 \in [\sqrt{a};+\infty[$. en particulier, $u_0 \geqslant \sqrt{a}$.
   - Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie. $u_n \geqslant \sqrt{a}$. La fonction f étant croissante sur $[\sqrt{a};+\infty[$, on a alors $f(u_n) \geqslant f(\sqrt{a})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
   - La proposition $\mathscr{P}(1)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) - u_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{u_n} - u_n\right)$.
   Pour tout réel $x \geqslant \sqrt{a}$, on pose alors $g(x) = \dfrac{a}{x} - x$. g est décroissante sur $[\sqrt{a};+\infty[$. De plus, $g(\sqrt{a}) = \dfrac{a}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} = \sqrt{a} - \sqrt{a} = 0$. Ainsi, pour tout $x \in [\sqrt{a};+\infty[$, $g(x) \leqslant 0$. Or, on a vu que pour tout entier naturel n, $u_n \in [\sqrt{a};+\infty[$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite (u_n) est décroissante. Puisqu'elle est minorée, la suite (u_n) est donc convergente.
5. On admet que la limite ℓ le la suite (u_n) vérifie $f(\ell) = \ell$. On a donc $\ell = \dfrac{\ell}{2} + \dfrac{a}{2\ell}$ soit $\ell^2 = a$. ℓ étant forcément positive, on a alors $\ell = \sqrt{a}$.

Exercices de synthèse

▶ Correction 20 – Voir l'énoncé

Partie A : Première approche

1. On a $u_0 = 100$, $u_1 = \dfrac{3}{4} \times 100 + 10 = 85$ et $u_2 = \dfrac{3}{4} \times 85 + 10 = 73{,}75$. En particulier, $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, la suite (u_n) n'est donc pas arithmétique. De plus $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$. La suite (u_n) n'est donc pas géométrique.
2. Il semblerait que la suite (u_n) soit convergente, de limite 40.
3. Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n \geqslant 40$ ».
   - $\mathscr{P}(0)$ est vraie car $u_0 = 100 \geqslant 40$.
   - Soit un entier n tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Ainsi, $u_n \geqslant 40$, donc $\dfrac{3}{4}u_n \geqslant 30$ et $\dfrac{3}{4}u_n + 10 \geqslant 40$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 40$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
   - D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
4. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{u_n}{4} + 10$. Or, $u_n \geqslant 40$ donc $-\dfrac{u_n}{4} + 10 \leqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.
5. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 40. Elle est donc convergente.

Partie B : Déterminer la limite

1. (a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 40$.
   (b) On rappelle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 10$.
   (c) Pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 40$.
   (d) Pour tout entier naturel n,
   $$v_{n+1} = u_{n+1} - 40 = \frac{3}{4}u_n + 10 - 40 = \frac{3}{4}u_n - 30 = \frac{3}{4}(v_n + 40) - 30 = \frac{3}{4}v_n.$$
2. (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$. De plus, $v_0 = u_0 - 40 = 60$. Pour tout entier naturel n,

on a donc $v_n = 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 60 \times 0.75^n$. Puisque pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 40$, on a alors que $u_n = 40 + 60 \times 0{,}75^n$.

3. Puisque $-1 < 0{,}75 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}75^n = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 40$.

► Correction 21 – Voir l'énoncé

1. Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3{,}6 = -\frac{2}{3}u_n + 6 - 3{,}6 = -\frac{2}{3}u_n + 2{,}4 = -\frac{2}{3}(v_n + 3{,}6) + 2{,}4 = -\frac{2}{3}v_n - 2{,}4 + 2{,}4 = -\frac{2}{3}v_n.$$

2. La suite (v_n) est géométrique. Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 3{,}6 = 16{,}4$ et sa raison vaut $q = -\frac{2}{3}$.
3. Pour tout entier naturel n, $v_n = 16{,}4 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ et $u_n = 3{,}6 + 16{,}4 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.
4. Puisque $-1 < -\frac{2}{3} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} = 3{,}6$.

► Correction 22 – Voir l'énoncé

1. Pour tout entier naturel n,$T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25) = -0{,}06T_n + 0{,}06 \times 25 = 0{,}06T_n + 1{,}5$.
En ajoutant T_n aux deux membres de l'égalité, on trouve $T_{n+1} = 0{,}94T_n + 1{,}5$.
2. $T_1 = 0{,}94T_0 + 1{,}5 = 0{,}94 \times (-19) + 1{,}5 = -16{,}36 \simeq -16{,}4$.
$T_2 = 0{,}94T_1 + 1{,}5 = 0{,}94 \times (-16{,}36) + 1{,}5 = -13{,}8784 \simeq -13{,}9$.
Attention à bien arrondir au dixième comme le demande la consigne !
3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « $T_n \leqslant 25$ ».
   - **Initialisation** : $T_0 = -19$. On a bien $T_0 \leqslant 25$. $P(0)$ est donc vraie.
   - **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a donc $T_n \leqslant 25$. En multipliant par 0,94, on a $0{,}94T_n \leqslant 0{,}94 \times 25$. On ajoute alors 1,5, ce qui donne $0{,}94T_n + 1{,}5 \leqslant 0{,}94 \times 25 + 1{,}5$, c'est-à-dire $T_{n+1} \leqslant 25$. $P(n+1)$ est vraie.
   - **Conclusion** : $P(0)$ est vraie, P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   Ce résultat est prévisible : la température ambiante est de 25 degrés, le gâteau qui est au départ plus froid ne peut pas dépasser cette température en sortant du congélateur.
4. Pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)$. Puisque pour tout entier naturel n, $T_n \leqslant 25$, on a donc $T_n - 25 \leqslant 0$ et donc $-0{,}06 \times (T_n - 25) \geqslant 0$, ce qui conduit à $T_{n+1} - T_n \geqslant 0$ et finalement $T_{n+1} \geqslant T_n$.
La suite (T_n) est donc croissante.
5. Puisque la suite (T_n) est croissante et majorée, elle est convergente.
6. (a) Pour tout entier naturel n

$$U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0{,}94T_n + 1{,}5 - 25 = 0{,}94T_n - 23{,}5.$$

Or, puisque $U_n = T_n - 25$, on a $T_n = U_n + 25$. Ainsi,

$$U_{n+1} = 0{,}94(U_n + 25) - 23{,}5 = 0{,}94U_n + 23{,}5 - 23{,}5 = 0{,}94U_n.$$

La suite (U_n) est donc géométrique, de raison 0,94. Son premier terme vaut

$$U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44.$$

(b) La suite (U_n) est géométrique : pour tout entier naturel n, $U_n = -44 \times 0{,}94^n$. Par ailleurs, $T_n = U_n + 25$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $T_n = -44 \times 0{,}94^n + 25$.

   (c) Puisque $-1 < 0{,}94 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}94^n = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} = 25$. A terme, les gâteaux auront une températures de 25 degrés Celsius.

7. (a) $T_{30} = -44 \times 0{,}94^{30} + 25 \simeq 18$. Après une demi-heure à température ambiante, les gâteaux auront une température d'environ 18°C.
   (b) On a $T_{17} = -44 \times 0{,}94^{17} + 25 \simeq 9{,}63$ et $T_{18} = -44 \times 0{,}94^{18} + 25 \simeq 10{,}55$. Cécile doit déguster son gâteau entre 17 et 18 minutes après la sortie du congélateur.
   (c) Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$.

```python
def seuil():
  n = 0
  T = -19
  while T < 10 :
    T = 0.94 T +1.5
    n = n + 1
  return n
```

▶ Correction 23 – Voir l'énoncé

1. Au 31 octobre, il y a 3080 cétacés. Leur nombre diminue alors de 5%. $\left(1 - \dfrac{5}{100}\right) \times 3080 = 2926$. On a bien $u_1 = 2926$.
2. Chaque année, le nombre de cétacés augmente de 80 puis diminue de 5%. On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95(u_n + 80) = 0{,}95u_n + 76$.
3. (a) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n \geqslant 1520$ ».
      - $u_0 = 3000$. On a bien $u_0 \geqslant 1520$, $P(0)$ est vraie.
      - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n \geqslant 1520$. Ainsi, $0.95u_n \geqslant 0.95 \times 1520$ et $0.95u_n + 76 \geqslant 0.95 \times 1520 + 76$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 1520$. $P(n+1)$ est vraie.
      - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   (b) Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n 0.95u_n + 76 - u_n = -0.05u_n + 76 = -0.05\left(u_n + \frac{76}{-0.05}\right) = -0{,}05(u_n - 1520).$$

   (c) Puisque pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$, on a $-0.05(u_n - 1520) \leqslant 0$. Ainsi, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.
   (d) La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.
4. (a) Pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = u_{n+1} - 1520 = 0.95u_n + 76 - 1520 = 0.95(a_n + 1520) + 76 - 1520 = 0.95a_n.$$

   La suite (a_n) est donc géométrique de raison 0.95 et de premier terme $a_0 = u_0 - 1520 = 3000 - 1520 = 1480$.
   (b) Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n = 1480 \times 0.95^n$ et $u_n = a_n + 1520 = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.
   (c) Puisque $-1 < 0.95 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.95^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1520$.
5.

```python
def seuil():
  U = 3000
  N = 0
  while U > 2000 :
    N = N + 1
    U = 0.95 * U + 76
  return N
```

6. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1520$, et que la suite (u_n) est décroissante, il arrivera forcément un rang à partir duquel la suite sera sous 2000. Cela arrive au rang 22 : la réserve fermera donc en 2039.

► Correction 24 – Voir l'énoncé

1. (a) On a $u_1 = \dfrac{3\times\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}$ et $u_1 = \dfrac{3\times\frac{3}{4}}{1+2\times\frac{3}{4}} = \dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{9}{10}$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $0 < u_n$ ».
   - **Initialisation** : Pour $n=0$, on a $u_0 = \dfrac{1}{2}$. On a bien $0 < u_0$. $P(0)$ est vraie.
   - **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors u_{n+1} est le quotient de deux réels strictement positifs, il est donc lui-même strictement positif. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - **Conclusion** : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
2. (a) Pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3}{1+2u_n}$. Or, puisque $u_n < 1$, on a donc $1+2u_n < 3$ et donc $1 < \dfrac{3}{1+2u_n}$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Les termes de cette suite étant strictement positifs, cela signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.
   (b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Elle est donc convergente.
3. (a) Pour tout entier naturel n,
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{\dfrac{3u_n}{1-2u_n}}{\dfrac{1+2u_n-3u_n}{1-2u_n}} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3v_n.$$
   La suite (v_n) est géométrique de raison 3.
   (b) On a par ailleurs $v_0 = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = 1\times 3^n = 3^n$.
   (c) Pour tout entier naturel n, on a $v_n(1-u_n) = u_n$ et donc $v_n = u_n + u_n v_n$, c'est-à-dire $u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n}$.
   Finalement, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.
   (d) Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n} \times \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}}$. Or, puisque $3>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.
   Il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

► Correction 25 – Voir l'énoncé

1. On a $u_1 = \dfrac{6\times 8+2}{8+5} = \dfrac{50}{13}$.
2. (a) f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,
$$f'(x) = \frac{6(x+5)-1(6x+2)}{(x+5)^2} = \frac{6x+30-6x-2}{(x+5)^2} = \frac{28}{(x+5)^2} > 0$$
   La fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
   (b) La fonction f étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, alors, pour l $x>2$, on a $f(x) > f(2)$.
   Or, $f(2) = \dfrac{6\times 2+2}{2+5} = \dfrac{14}{7} = 2$. Ainsi, pour tout réel $x>2$, $f(x)>2$.
   (c) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n > 2$ ».
   - **Initialisation** : $u_0 = 8 > 2$. $P(0)$ est donc vraie.

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Puisque f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$, on a alors $f(u_n) > f(2)$, soit $u_{n+1} > 2$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

3. (a) Puisque pour tout entier naturel n, $u_n > 2$, alors $u_n + 1 > 0$, $u_n + 5 > 0$ et $2 - u_n < 0$. Par conséquent, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.
   (b) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, elle est donc convergente.
4. (a) On a $v_0 = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \dfrac{8-2}{8+1} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.
   (b) Pour tout entier naturel n,
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1} = \frac{\dfrac{6u_n+2}{u_n+5} - 2}{\dfrac{6u_n+2}{u_n+5}+1} = \frac{\dfrac{6u_n+2-2u_n-10}{u_n+5}}{\dfrac{6u_n+2+u_n+5}{u_n+5}} = \frac{4u_n-8}{7u_n+7} = \frac{4(u_n-2)}{7(u_n+1)} = \frac{4}{7}v_n.$$
   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{4}{7}$.
   (c) Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{4}{7}\right)^n$.
   Or, puisque $-1 < \dfrac{4}{7} < 1$, il en vient que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{4}{7}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.
   Par ailleurs, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$. Notons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ (qui existe bien d'après les questions précédentes).
   On a alors $0 = \dfrac{\ell - 2}{\ell + 1}$. Ainsi, $\ell - 2 = 0$ et donc $\ell = 2$.
5. Le programme renvoie le premier rang n à partir duquel on a $u_n \leqslant 2.001$. Ce rang vaut 14.