1. Cours : Limites de fonction

Dans tout ce chapitre, D désigne une partie de $\mathbb{R}$ et f est une fonction définie sur D.

1 Limite en l'infini

1.1 Limite infinie en l'infini

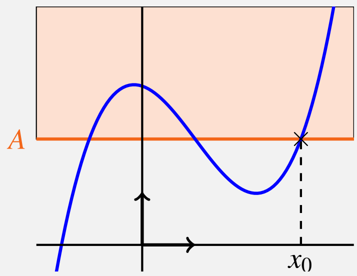
Définition 1 : On suppose qu'il existe un réel a tel que $[a;+\infty[\subset D$.

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si, pour tout réel A, il existe un réel $x_0 \in D$ tel que, pour tout $x \in D$, si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \geqslant A$. On notera $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si, pour tout réel A, il existe un réel $x_0 \in D$ tel que, pour tout $x \in D$, si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \leqslant A$. On notera $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Cette définition est très similaire à celle rencontrée pour les limites de suites : pour n'importe quel réel A, aussi grand soit-il, à partir d'une certaine valeur du réel x, $f(x)$ est plus grand que ce réel A.

■ **Exemple 1 :** On représente ici la courbe d'une fonction f dans un repère.

Pour n'importe quel réel A, aussi grand que l'on veut, on peut trouver un x_0 à partir duquel la courbe est toujours au-dessus de la droite d'équation $y = A$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



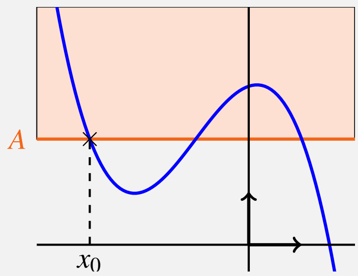
■

Définition 2 : On suppose qu'il existe un réel a tel que $]-\infty;a] \subset D$.

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si, pour tout réel A, il existe un réel $x_0 \in D$ tel que, pour tout $x \in D$, si $x \leqslant x_0$, alors $f(x) \geqslant A$. On notera $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
- On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si, pour tout réel A, il existe un réel $x_0 \in D$ tel que, pour tout $x \in D$, si $x \leqslant x_0$, alors $f(x) \leqslant A$. On notera $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

■ **Exemple 2 :** On représente ici une fonction f dans un repère.

Pour n'importe quel A, aussi grand que l'on veut, on peut trouver un x_0 en-dessous duquel la courbe est toujours au-dessus de la droite d'équation $y = A$.
On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.



■

Il s'agit de la principale différence avec les suites : pour les suites, l'indice n ne pouvait que tendre vers $+\infty$.

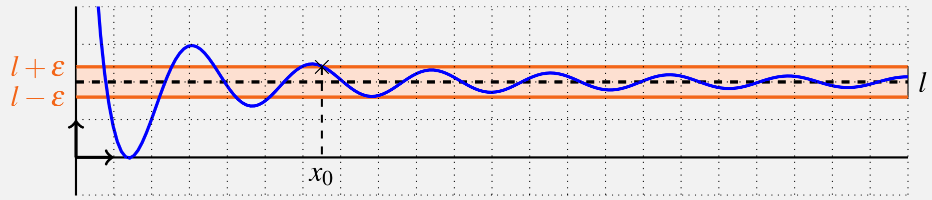
Dans le cas des fonctions, le réel x peut aller vers $+\infty$ mais aussi $-\infty$ et d'autres valeurs réelles entre les deux, comme nous le verrons plus tard dans ce chapitre...

1.2 Limite finie en l'infini

Définition 3 : On suppose qu'il existe un réel a tel que $[a;+\infty[\subset D$. Soit $l \in \mathbb{R}$.

- On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel x_0 tel que, si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \in]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon[$.
  Si une telle limite existe, elle est unique. On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.
- On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel x_0 tel que, si $x \leqslant x_0$, alors $f(x) \in]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon[$.
  Si une telle limite existe, elle est unique. On note alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.

■ **Exemple 3 :** Une fonction f est représentée ci-dessous. Pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel x_0 à partir duquel on a toujours $f(x) \in]2-\varepsilon;2+\varepsilon[$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.



■

Définition 4 : On se place dans un repère $(0;\vec{i},\vec{j})$ orthonormé.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$

■ **Exemple 4 :** Dans le cas précédent, la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$. ■

Comme dans le cas des suites, il est parfois utile de préciser le comportement d'une fonction qui admet une limite finie en $+\infty$.

Définition 5 : On suppose qu'il existe un réel a tel que $[a;+\infty[\subset D$. Soit $l \in \mathbb{R}$.

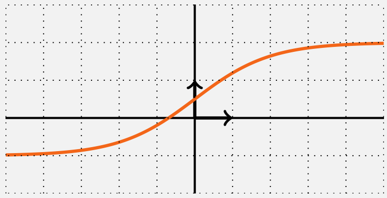
- On dit que $f(x)$ tend vers ℓ par valeurs supérieures lorsque x tend vers $+\infty$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel x_0 tel que, si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \in]\ell;\ell+\varepsilon[$. Autrement dit, la limite de f en $+\infty$ vaut ℓ et $f(x)$ reste supérieur à ℓ à partir d'un certain réel. On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell^+$.
- On dit que $f(x)$ tend vers ℓ par valeurs inférieures lorsque x tend vers $+\infty$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel x_0 tel que, si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \in]\ell-\varepsilon;\ell[$. Autrement dit, la limite de f en $+\infty$ vaut ℓ et $f(x)$ reste inférieur à ℓ à partir d'un certain réel. On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell^-$.

Attention, ce n'est pas parce que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ qu'on a forcément $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell^+$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell^-$. Les valeurs de $f(x)$ peuvent osciller autour de ℓ, lui étant parfois supérieures, parfois inférieures.

Les mêmes définitions s'étendent naturellement pour les limites en $-\infty$.

■ **Exemple 5 :** On a représenté la courbe d'une fonction f dans un repère.

Il semblerait que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2^-$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = (-1)^+$
La droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.



■

1.3 Limites usuelles

Propriété 1 : Soit n un entier naturel non nul.

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Si n est pair,

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0^+$$

Si n est impair,

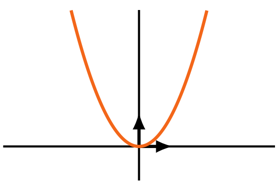
$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0^-$$

Enfin,

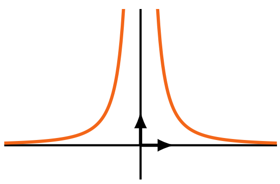
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Il est important de visualiser les courbes représentatives de ces fonctions. Celles-ci vous permettront de bien garder ces limites usuelles en tête.

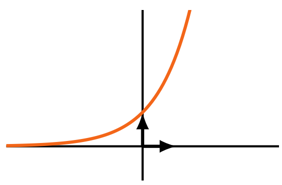
$x \mapsto x^n$, **n pair**



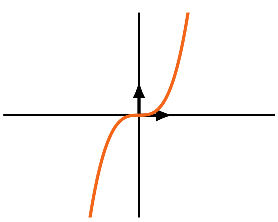
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$, **n pair**



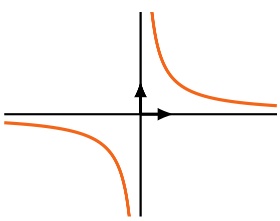
$x \mapsto e^x$



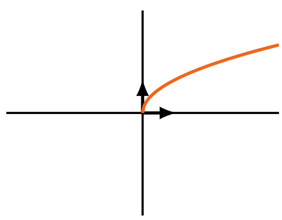
$x \mapsto x^n$, **n impair**



$x \mapsto \frac{1}{x^n}$, **n impair**



$x \mapsto \sqrt{x}$



2 Limite en un point

2.1 Limite finie en un point

Définition 6 : Soit $a \in D$ et l un réel.

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si $x \in]a-\delta; a+\delta[$, alors $f(x) \in]\ell-\varepsilon : \ell+\varepsilon[$.

Autrement dit, tout intervalle ouvert centré en ℓ contient toutes les valeurs de x lorsque x est suffisamment proche de a.

Si elle existe, une telle limite est unique. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

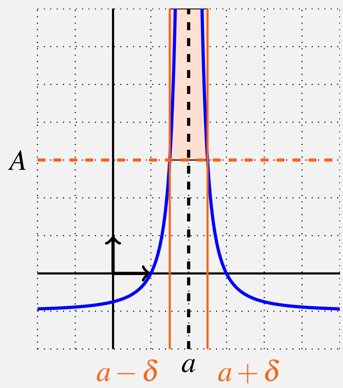
Certaines fonctions admettent une limite finie différente si l'on se rapproche de a par valeurs supérieurs ou par valeurs inférieures. Nous aurons l'occasion d'en discuter plus amplement dans le chapitre suivant.

2.2 Limite infinie en un point

Définition 7 : Soit $a \in D$ ou sur un bord de D.

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si, pour tout réel A, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si $x \in]a-\delta; a+\delta[\cap D$, alors $f(x) > A$. Autrement dit, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est suffisamment proche de a. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si, pour tout réel A, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si $x \in]a-\delta; a+\delta[\cap D$, alors $f(x) < A$. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

■ **Exemple 6 :** On a tracé ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f.



Pour n'importe quelle valeur du réel A, on peut trouver un intervalle centré sur a tel que toute valeur de $f(x)$ est supérieur à A pour n'importe quel x pris dans cet intervalle. Ce raisonnement vaut peu importe la valeur du réel A : on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$. ■

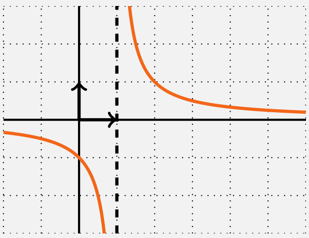
Tout comme précédemment, le comportement de la fonction f peut varier selon si l'on approche du réel a par valeurs inférieures ou supérieures. Il nous faut donc distinguer ces deux cas.

Définition 8 : Soit $a \in D$ ou sur un bord de D.

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a par valeurs inférieures si, pour tout réel A, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si $x \in]a-\delta; a[\cap D$, alors $f(x) > A$. Autrement dit, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est suffisamment proche de a tout en lui étant inférieur. On note alors $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a par valeurs supérieures si, pour tout réel A, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si $x \in]a; a+\delta[\cap D$, alors $f(x) > A$. Autrement dit, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est suffisamment proche de a tout en lui étant supérieur. On note alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

Là encore, ces définitions peuvent s'étendre pour une limite valant $-\infty$.

■ **Exemple 7 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, dont on a tracé ci-dessous la courbe dans un repère.



Il semblerait que, lorsque l'on s'approche de 1 par valeurs supérieures, la limite soit $+\infty$, ce que l'on notera $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

En revanche, lorsque l'on s'approche de 1 par valeurs inférieures, la limite semble être $-\infty$, ce que l'on note $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$. ■

Définition 9 : Lorsque la limite d'une fonction f est infinie en un point a, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.

■ **Exemple 8 :** Dans l'exemple précédent, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe de f. ■

3 Opérations sur les limites

Les opérations sur les limites sont similaires à celles connues sur les suites. Dans cette partie, f et g sont deux fonctions définies au voisinages de a, a pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$. l_1 et l_2 sont deux réels.

3.1 Limite de la somme

Propriété 2 — Limite de la somme : On a :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l_1	l_1	l_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	l_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} (f(x)+g(x))$	$l_1 + l_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**FI**

3.2 Limite du produit

Propriété 3 — Limite du produit : .

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l_1	$l_1 \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l_2	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)\,g(x))$	$l_1\,l_2$	∞ (r.s.)	∞ (r.s)	**FI**

r.s. : Règle des signes

■ **Exemple 9 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x non nul par $f(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{x}$.

D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Ainsi, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Toutefois, si l'on étudie la limite en $+\infty$, nous aboutissons à une forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». Il est alors possible d'utiliser les techniques de calcul déjà employées lors du chapitre sur l'étude des limites de suite, en particulier la factorisation par le terme de plus haut degré.

Ainsi, pour tout réel non nul x, $f(x) = x^2 \times \left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right)$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right) = 1$. Ainsi, par produits, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. ■

3.3 Limite du quotient

Propriété 4 — Limite du quotient : Dans cette partie, on suppose $l_2 \neq 0$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l_1	l_1	$l_1 \neq 0$	∞	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l_2	∞	0^+ ou 0^-	l_2, 0^+ ou 0^-	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\dfrac{l_1}{l_2}$	0	∞ (r.s.)	∞ (r.s.)	**FI**	**FI**

r.s. : Règle des signes

■ **Exemple 10 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{1-2x^4}{1+x^2}$. L'étude des limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f aboutit à une forme indéterminée. Or, pour tout réel non nul x,

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2} \times \frac{\frac{1}{x^4} - 2}{\frac{1}{x^2} + 1} = x^2 \times \frac{\frac{1}{x^4} - 2}{\frac{1}{x^2} + 1}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^4} - 2\right) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} + 1\right) = 1$. Ainsi, en appliquant les règles de calcul sur les produits et quotients de limite, on aboutit à $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. ■

■ **Exemple 11 :** On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq 2$ par $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-4}$.

Pour tout réel $x \neq 2$ et $x \neq 0$, on a alors $f(x) = \dfrac{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(2-\dfrac{4}{x}\right)} = \dfrac{3+\dfrac{1}{x}}{2-\dfrac{4}{x}}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x}\right) = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$. De la même manière, on montre que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$ ■

■ **Exemple 12 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{1-x}$, définie sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$.

Pour calculer la limite en 1^+ :

- $\lim\limits_{x\to1^+} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to1}(1-x) = 1-1 = 0$. Par ailleurs, si $x \geqslant 1$, alors $1-x \leqslant 0$ et donc $\lim\limits_{x\to1^+}(1-x) = 0^-$.

  Ainsi, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$.
- Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$.

Pour calculer la limite en 1^- :

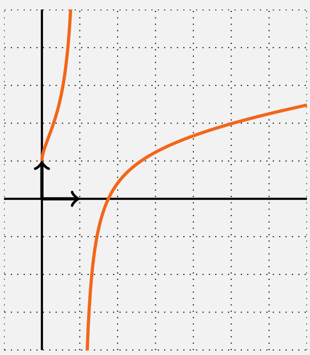
- $\lim\limits_{x\to1^-} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to1}(x-1) = 1-1 = 0$. Par ailleurs, si $x \leqslant 1$, alors $1-x \geqslant 0$ et donc $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x) = 0^+$.

  Ainsi, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{1-x} = +\infty$.
- Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$.

Pour calculer la limite en $+\infty$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$, ainsi, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1-x} = 0$.
- Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Représenter la courbe de la fonction f dans un graphique (par exemple, dans un logiciel de géométrie ou sur une calculatrice) permet de confirmer ou d'infirmer les calculs.



■

3.4 Composition de limites

Propriété 5 : Soit a, b et c des réels ou $\pm\infty$. Soit f et g des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} g(X) = c$. Alors $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = c$.

■ **Exemple 13 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x^2-3x-5}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^2-3x-5) = -\infty$. Par ailleurs, $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$.

Ainsi, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x^2-3x-5} = 0$. ■

4 Comparaison de limites

Théorème 1 — Théorème de comparaison : Soit a un réel ou $\pm\infty$. Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I dont a est un élément ou un bord.

- Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
- Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

■ **Exemple 14 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = (2+\cos(x))\mathrm{e}^x$.

Pour tout réel x, $\cos(x) \geqslant -1$, ce qui implique que $2+\cos(x) \geqslant 1$ d'où $f(x) \geqslant \mathrm{e}^x$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. ■

■ **Exemple 15 :** On souhaite montrer que, justement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \mathrm{e}^x - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Ainsi, $f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$. On construit alors le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

On s'aperçoit alors que, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 1$, et donc que $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, on a donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. ■

Théorème 2 — Théorème d'encadrement : Soit a un réel. Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I dont a est un élément ou un bord.

Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant$ et si f et h admettent une même limite **finie** l en a, alors g admet également une limite finie en a et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l$.

■ **Exemple 16 :** Pour tout réel non nul x, on pose $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$. On a alors, pour tout $x > 0$, $-\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. ■

■ **Exemple 17 :** Pour tout réel non nul x, on pose $g(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Pour tout réel $x > 0$, $-1 \leqslant \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant 1$ et donc $-x \leqslant f(x) \leqslant x$. Or, $\lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$.

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$. ■

5 Croissances comparées

Propriété 6 — Croissances comparées – fonction exponentielle : Soit n un entier naturel.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

■ **Exemple 18 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{e^x - x}{e^x}$. On a alors $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x} - \dfrac{x}{e^x} = 1 - \dfrac{x}{e^x}$.

Or, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, on a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. ■

Cette proposition peut être vue comme la limite de nouvelles fonctions, les fonctions $x \mapsto \dfrac{e^x}{x^n}$ et $x \mapsto x^n e^x$. Il est alors possible d'utiliser tous les résultats précédents, en particuliers ceux sur la composition. Par exemple, si l'on considère une fonction u telle que $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$, alors on aura $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{e^{u(x)}}{u(x)} = +\infty$.

Il est important de bien avoir la même expression dans l'exponentielle et au dénominateur !

■ **Exemple 19 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{-2x+4}}{3x^3}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. On souhaite déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Pour cela, il semble naturel de faire intervenir une croissance comparée. Seulement, les expressions dans l'exponentielle et au dénominateur sont différentes, il faut donc transformer légèrement cette écriture pour se ramener aux fonctions mentionnées dans la propriété.

Pour tout réel non nul x,

$$\frac{\mathrm{e}^{-2x+4}}{3x^3} = \frac{\mathrm{e}^{-2x} \times \mathrm{e}^4}{3 \times x^3} = \frac{\mathrm{e}^4}{3} \times \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x^3} = \frac{\mathrm{e}^4}{3} \times \frac{(-2)^3 \times \mathrm{e}^{-2x}}{(-2)^3 \times x^3} = \frac{-8\mathrm{e}^4}{3} \times \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{(-2x)^3}.$$

Or, $\lim_{x \to -\infty} (2x) = +\infty$, et, par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X^n} = +\infty$.

Ainsi, par composition, $\lim_{x \to -\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{(-2x)^3} = +\infty$. Enfin, par produit, $\lim_{x \to -\infty} = -\infty$. ■

6 Approfondissement : Asymptotes obliques

Définition 10 : Soit a un réel et f une fonction définie sur $]a;+\infty[$. Soit m et p des réels.

On dit que la droite d'équation $y = mx + p$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + p)) = 0.$$

■ **Exemple 20 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + 3x - 3}{2x - 2}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour tout $x \neq 1$,

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 2\right) = \frac{x^2 + 3x - 3}{2x - 2} - \frac{\left(\frac{1}{2}x + 2\right)(2x - 2)}{2x - 2} = \frac{x^2 + 3x - 3 - x^2 - 4x + x + 4}{2x - 2} = \frac{1}{2x - 2}.$$

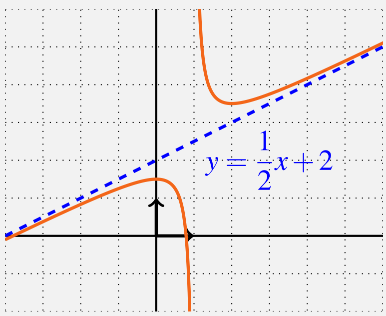
Ainsi, $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 2\right)\right) = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 2\right)\right) = 0$.

La droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Il est également possible, en étudiant le signe de $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 2\right)$, de déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à son asymptote. Ainsi,

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 2\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2x - 2} \leqslant 0 \Leftrightarrow 2x - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1.$$

La courbe de f est en-dessous de son asymptote en $-\infty$ et est au-dessus en $+\infty$.



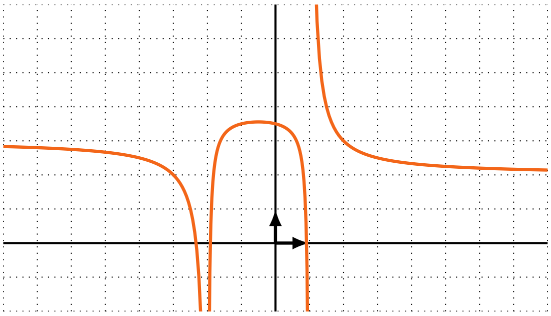
■

2. Exercices

Notion de limite

► Exercice 1 – Voir le corrigé

On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dans un repère orthonormé.

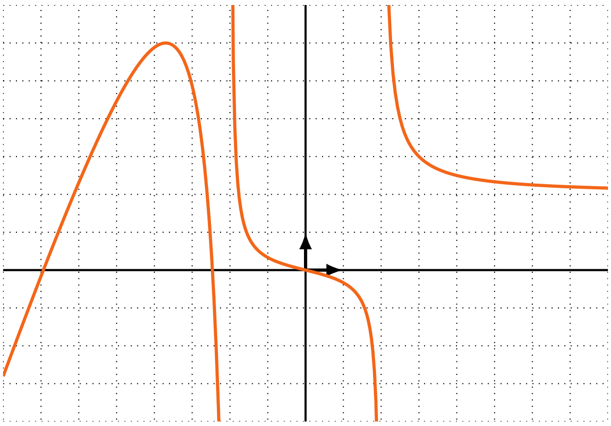


A l'aide de cette représentation graphique, déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Quelles sont les asymptotes verticales ou horizontales à la courbe représentative de la fonction f ?

► Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère une fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Déterminer graphiquement les valeurs de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Quelles sont les asymptotes horizontales et verticales à la courbe $\mathscr{C}_f$?

► Exercice 3 – Voir le corrigé

On considère une fonction f dont le tableau de variations est donnée ci-dessous. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

x	$-\infty$		-4		2		5		7		$+\infty$
f	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-3	↗	1

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-4)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. Quelles sont les asymptotes horizontales et verticales à $\mathscr{C}_f$?
3. Dans un repère orthonormé, tracer une courbe d'une fonction compatible avec ce tableau de variations.

Opérations sur les limites

► Exercice 4 – Voir le corrigé

Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x-3)$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x-3)$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x^2-3)$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)$

f. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}\right)$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right)$

h. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right)$

i. $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$

j. $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$

k. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$

l. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$

m. $\lim\limits_{x\to+\infty}((1-2x)\mathrm{e}^{x})$

n. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-3x+1\right)$

o. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3x+1\right)$

p. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{-x^2+7x-3}\right)$

q. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\exp\left(\dfrac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right)$

r. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\exp\left(\dfrac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right)$

► Exercice 5 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-4x-12}{2x^2+x-3}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$, $-\dfrac{3}{2}^+$, $-\dfrac{3}{2}^-$, 1^-, 1^+ et $+\infty$.
3. Justifier que f est dérivable sur D et exprimer $f'(x)$ pour tout réel x de D.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur D.
5. Tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

► Exercice 6 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x+1}$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$, $+\infty$, -1^+ et -1^-.

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Une autre forme indéterminée...

1. Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $2x^3+6x^2-9x+1=(x-1)(ax^2+bx+c)$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3+6x^2-9x+1}{3x^2-x-2}$.

► Exercice 8 – Voir le corrigé

On rappelle qu'une fonction f est dérivable en x si le taux de variation $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.

1. Écrire le taux de variations de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ entre 0 et h.
2. Que vaut $f'(0)$? En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$

Comparaison de limites

► Exercice 9 – Voir le corrigé

Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x + \sin(x))$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 + \dfrac{3}{x}\right)$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left((\cos(4x)-3)x^3\right)$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((\cos(4x)-3)x^3\right)$

f. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\sin(x)+2\cos(x)}{x^3}$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right)$

h. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+2\sin(x)}{x}\right)$

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+2\sin(x)}{x}\right)$

j. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\cos(x)}{x+\sin(x)}$

k. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sin(x)+3}$

l. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 - 3x + \sin(4x)$

► Exercice 10 – Voir le corrigé

Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5\mathrm{e}^{-x}$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5\mathrm{e}^{-x}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{x^2}$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x}$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x}$

f. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}$

g. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}$

h. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{28x}$

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{28x}$

j. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x - 3x^2 + 5x - 1)$

k. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^x - 3x^2 + 5x - 1)$

l. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x}$

m. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x}$

n. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x}$

o. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x}$

p. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2+\cos(x))\mathrm{e}^x}{x}$

q. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(2+\cos(x))\mathrm{e}^x}{x}$

r. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2\mathrm{e}^{-x} - x)$

► Exercice 11 – Voir le corrigé

La fonction tangente hyperbolique est la fonction notée th et définie pour tout réel x par

$$th(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} th(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} th(x)$.
2. Justifier que th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,
$$th'(x) = \frac{4}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}.$$
3. En déduire le tableau de variations de th.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction th à l'abscisse 0.
5. Dans un repère orthonormé, tracer l'allure de la courbe th ainsi que sa tangente à l'abscisse . 0.

► Exercice 12 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$. Étudier la fonction f (domaine de définition, variation, signe et limites). Esquisser sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Approfondissement et synthèse

► Exercice 13 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq -1$ par

$$f(x) = \frac{x^2+3x-4}{2x+2}.$$

1. Étudier la fonction f : variations, signe, limites.
2. Pour tout réel $x \neq -1$, on pose $g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{2}x+1\right)$.
   (a) Montrer que, pour tout réel $x \neq 2$, $g(x) = -\frac{6}{2x+2}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. On dit que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x+1$ est une asymptote oblique à la courbe de f.
3. Dans un même repère orthonormé, tracer la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x+1$ et la courbe représentative de la fonction f.

► Exercice 14 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq 1$ par $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel $x \neq 1$,

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{x-1}.$$

2. En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ dont on déterminera l'équation.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-3x+2}$.

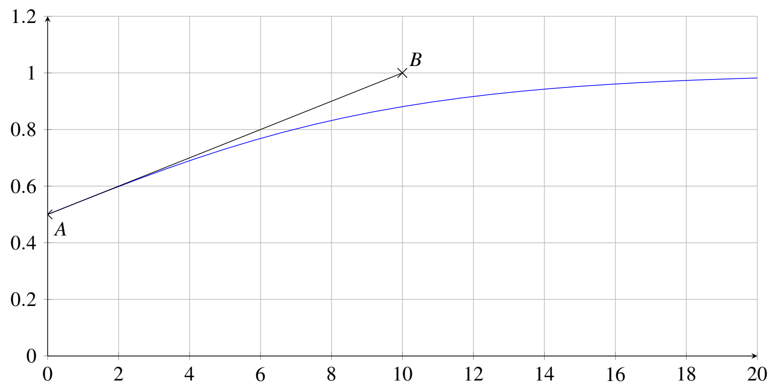
1. Donner le domaine de définition D de f.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Étudier les variations de f sur D.
4. Écrire le polynôme x^2-3x+2 sous forme canonique.
5. En déduire que la droite d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et que la droite d'équation $y = \frac{3}{2} - x$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.
6. Tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

► Exercice 16 (Antilles - Guyane 2019) – Voir le corrigé

Soit a et b deux réels. On considère une fonction f définie pour tout réel x sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe C_f représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette courbe passe par le point $A(0\,;0{,}5)$. La tangente à la courbe C_f au point A passe par le point $B(10\,;1)$.



1. Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Justifier que $a = 1$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Vérifier que pour tout réel $x \geqslant 0$

$$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{(1+\mathrm{e}^{-bx})^2}.$$

4. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0;+\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0{,}2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en années, depuis le 1er janvier 2020.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2020, $p(3{,}5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2023.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier. 2030 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2. (a) Déterminer le sens de variations de la fonction p sur $[0;+\infty[$.
   (b) Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, $p(x) < 1$. En revenant au contexte étudié, ce résultat vous semble-t-il cohérent ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)$ Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

► Exercice 17 (Amérique du Sud 2018) – Voir le corrigé

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.

Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètres de la queue du lézard en fonction du nombre de jours. Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 10\mathrm{e}^{u(x)}$$

où u est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$u(x) = -\exp\left(2 - \frac{x}{10}\right)$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

On admet que les fonctions u et f sont dérivables sur $[0\,;+\infty[$ et on note u' et f' leurs fonctions dérivées respectives.

1. (a) Vérifier que pour tout réel x positif, on a

$$u'(x) = -\frac{1}{10}u(x).$$

   (b) En déduire que pour tout réel positif x, on a

$$f'(x) = -u(x)\mathrm{e}^{u(x)}.$$

   (c) Quel est le sens de variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$?

2. (a) Calculer $f(20)$. En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   (c) Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale. On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$. On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0\,;+\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' et on admet que, pour tout réel x positif :

$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}(1+u(x)).$$

   (a) Déterminer les variations de f' sur $[0\,;+\infty[$.

   (b) En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

3. Corrigés

Notion de limite

► Correction 1 – Voir l'énoncé

D'après cette représentation graphique, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

De plus,

- La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f.
- La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe de f.
- La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.
- La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.

► Correction 2 – Voir l'énoncé

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

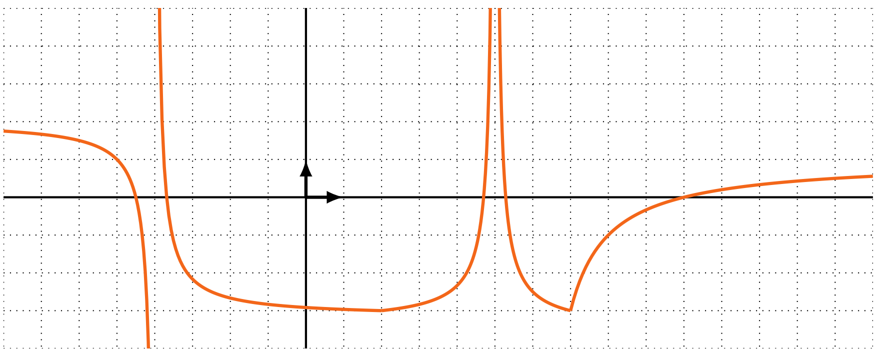
Par ailleurs,

- La droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe de f.
- La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe de f.
- La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

► Correction 3 – Voir l'énoncé

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to(-4)^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Les droites d'équation $x = -4$ et $x = 5$ sont asymptotes verticales à la courbe de f. La droite d'équation $y = 2$ en est une asymptote horizontale en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ l'est en $+\infty$.



Opérations sur les limites

► Correction 4 – Voir l'énoncé

a. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3+x-3) = +\infty$.

b. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+x-3) = -\infty$.

c. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, on a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3+x^2-3) = +\infty$.

d. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) = 1$.

e. On a que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) = 0$.

f. On a que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}\right) = 0$.

g. $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0+} \sqrt{x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to0+} \left(\dfrac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right) = +\infty$.

h. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right) = +\infty$.

i. $\lim\limits_{x\to1^+} (1-x) = 0^-$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to1^+} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right) = -\infty$.

j. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 0^+$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to1^-} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right) = +\infty$.

k. Pour tout réel $x \neq 1$ et $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x}-1}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right) = -2$.

l. Le même raisonnement permet d'établir que $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right) = -2$.

m. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

n. Pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-3x+1\right) = +\infty$.

o. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x) = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2-3x+1\right) = +\infty$.

p. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2+7x-3) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^{-x^2+7x-3}\right) = 0$.

q. Pour tout réel non nul x,

$$\frac{1-x^4}{2+x+x^3} = \frac{x^4\left(\frac{1}{x^4}-1\right)}{x^3\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}+1\right)} = x \times \frac{\frac{1}{x^4}-1}{\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}+1}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et donc, en appliquant la règle des signes, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^4}{2+x+x^3} = +\infty$.
Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty$. Finalement, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\exp\left(\dfrac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right) = +\infty$.

r. $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et donc, en appliquant la règle des signes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^4}{2+x+x^3} - +\infty$. Or, $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$. Finalement,

$\lim_{x\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right)=0.$

► Correction 5 – Voir l'énoncé

1. Les racines du polynôme $2x^2+x-3$ sont 1 et $-\frac{3}{2}$; Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2};1\right\}$.
2. Pour tout réel x différent de 0, 1 ou $-\frac{3}{2}$, on a $f(x)=\frac{x^2}{x^2}\times\frac{1-\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$.

   On a donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{1}{2}$. Par ailleurs, le tableau de signes de $2x^2+x-3$ est le suivant .

x	$-\infty$		$-3/2$		1		$+\infty$
$2x^2+x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Ainsi, $\lim_{x\to(-\frac{3}{2})^-}(2x^2+x-3)=0^+$ et $\lim_{x\to(-\frac{3}{2})^-}(x^2-4x-12)=-\frac{15}{4}$. Ainsi, $\lim_{x\to(-\frac{3}{2})^-}f(x)=-\infty$.

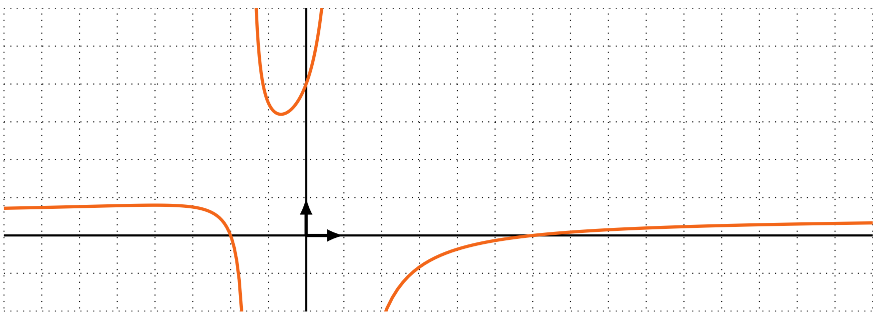
   Puis $\lim_{x\to(-\frac{3}{2})^+}(2x^2+x-3)=0^-$ et $\lim_{x\to(-\frac{3}{2})^+}(x^2-4x-12)=-\frac{15}{4}$. Ainsi, $\lim_{x\to(-\frac{3}{2})^+}f(x)=+\infty$.

   Par ailleurs, $\lim_{x\to(1)^-}(2x^2+x-3)=0^-$ et $\lim_{x\to(1)^-}(x^2-4x-12)=-15$. Ainsi, $\lim_{x\to(1)^-}f(x)=+\infty$.

   Enfin, $\lim_{x\to(1)^+}(2x^2+x-3)=0^+$ et $\lim_{x\to(1)^+}(x^2-4x-12)=-15$. Ainsi, $\lim_{x\to(1)^+}f(x)=-\infty$.
3. f est le quotient de deux fonctions dérivables sur chaque intervalle de D, et dont le dénominateur ne s'annule pas sur D. f est donc dérivable sur chaque intervalle de D. Pour tout réel $x\in D$, on a alors

   $$f'(x)=\frac{(2x-4)(2x^2+x-3)-(x^2-4x-12)(4x+1)}{(2x^2+x-3)^2}=\frac{9x^2+42x+24}{(2x^2+x-3)^2}.$$
4. Pour tout $x\in D$, $(2x^2+x-3)^2>0$. $f'(x)$ est donc du signe de $9x^2+42x+24$. Il s'agit d'un polynôme du second degré dont les racines sont -4 et $-\frac{2}{3}$. On peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire les variations de f.

x	$-\infty$		-4		$-3/2$		$-2/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
f	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{4}{5}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{16}{5}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$



► Correction 6 – Voir l'énoncé

$\sqrt{x^2-3x+2}$ existe si et seulement si $x^2-3x+2 \geqslant 0$. Or, x^2-3x+2 est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 et 2.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\sqrt{x^2-3x+2}$ existe pour $x \in]-\infty;1] \cup [2;+\infty[$. Par ailleurs, -1 est une valeur interdite puisqu'elle annule le dénominateur de f. Ainsi, le domaine de définition de f est $(]-\infty;1] \cup [2;+\infty[) \setminus \{-1\}$.

Pour tout réel $x > 2$, $\sqrt{x^2} = x$ et donc $\sqrt{x^2-3x+2} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}$.

Ainsi, pour tout $x > 2$, $f(x) = \dfrac{x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

Il en vient que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Par ailleurs, pour tout réel $x < -1$, $\sqrt{x^2} = -x$! Il faut bien faire attention au signe ici.

Ainsi, pour tout réel $x < -1$, $f(x) = \dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

Il en vient que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

Puis, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} (x^2-3x+2) = \sqrt{6} > 0$. De plus, si $x < -1$, alors $1+x < 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} (1+x) = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} (x^2-3x+2) = \sqrt{6} > 0$. De plus, si $x > -1$, alors $1+x > 0$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to(-1)^+} (1+x) = 0^+$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

On développe l'expression de droite. Pour tout réel x,

$$(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c.$$

On identifie alors les coefficients de $2x^3+6x^2-9x+1$ et $ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$. Il suffit de trouver a, b et c tel que $a=2$, $b-a=6$, $c-b=-9$ et $-c=1$. On a donc $a=2$, $c=-1$ puis $b-a=6$ et $c-b=-9$.

En prenant $a=2$, $b=8$ et $c=-1$, on a alors $(x-1)(2x^2+8x-1)(x-1) = 2x^3+6x^2-9x+1$.

Les racines du polynôme $3x^2-x-2$ sont 1 et $-\dfrac{2}{3}$. Ainsi, pour tout réel x, $3x^2-x-2 = 3(x-1)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)$.

Alors, pour tout réel x différent de 1 et $-\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2x^3+6x^2-9x+1}{3x^2-x-2} = \dfrac{(x-1)(2x^2+8x-1)}{3(x-1)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)} = \dfrac{2x^2+8x-1}{3x+2}$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^3+6x^2-9x+1}{3x^2-x-2} = \dfrac{2\times1^2+8\times1-1}{3\times1+2} = \dfrac{9}{5}$.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

Ce taux vaut $\dfrac{e^h - e^0}{h-0}$ soit $\dfrac{e^h-1}{h}$.

$f'(0) = e^0 = 1$. Ainsi, par définition de la dérivée, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

Théorème de comparaison

► Correction 9 – Voir l'énoncé

a. Pour tout réel x, $e^x + \sin(x) \geqslant e^x - 1$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - 1) = +\infty$.
Ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + \sin(x)) = +\infty$.

b. Pour tout réel $x > 0$, $x^2 + \dfrac{3}{x} \geqslant x^2$ Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 + \dfrac{3}{x}\right) = +\infty$. Il est évidemment possible de faire une simple somme de limites.

c. Pour tout réel $x > 0$, $x^2 + 1 \geqslant x^2$, d'où $\sqrt{x^2+1} \geqslant \sqrt{x^2}$, c'est-à-dire $f(x) \geqslant x$ Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$.

d. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(4x) \leqslant 1$. Ainsi, $-4 \leqslant \cos(4x) - 3 \leqslant -2$. En particulier, pour $x > 0$, $f(x) \leqslant -2x^3$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^3) = -\infty$. Ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((\cos(4x)-3)x^3\right) = -\infty$.

e. Par ailleurs, pour $x < 0$, on a $\left((\cos(4x)-3)x^3\right) \geqslant -4x^3$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} (-4x^3) = +\infty$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left((\cos(4x)-3)x^3\right) = +\infty$.

f. Pour tout réel $x > 0$, $-3 \leqslant 3\sin(x) \leqslant 3$ et $-2 \leqslant 2\cos(x) \leqslant 2$.
Ainsi, pour tout réel x, $-5 \leqslant 3\sin(x) + 2\cos(x) \leqslant 5$ et donc $-\dfrac{5}{x^3} \leqslant \dfrac{3\sin(x)+2\cos(x)}{x^3} \leqslant \dfrac{5}{x^3}$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{5}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5}{x^3}\right) = 0$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3\sin(x)+2\cos(x)}{x^3}\right) = 0$.

g. Pour tout réel $x > 0$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et donc $-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right) = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right) = 1$.

h. Pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{x+2\sin(x)}{x} = 1 + 2\dfrac{\sin(x)}{x}$. Or, pour tout $x > 0$, $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+2\sin(x)}{x}\right) = 1$.

i. Pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{x+2\sin(x)}{x} = 1 + 2\dfrac{\sin(x)}{x}$.
Or, pour tout $x < 0$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et donc $-\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{\sin(x)}{x} \geqslant \dfrac{1}{x}$ (x est négatif, attention à bien changer le sens de l'inégalité !). Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin(x)}{x}=0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+2\sin(x)}{x}\right)=1$.

j. Pour tout réel $x>0$, $\dfrac{x+\cos(x)}{x+\sin(x)}=\dfrac{x}{x}\times\dfrac{1+\dfrac{\cos(x)}{x}}{1+\dfrac{\sin(x)}{x}}=\dfrac{1+\dfrac{\cos(x)}{x}}{1+\dfrac{\sin(x)}{x}}$.

Or, pour tout réel $x>0$, $-\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{\cos(x)}{x}\leqslant\dfrac{1}{x}$ et $-\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{\sin(x)}{x}\leqslant\dfrac{1}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\cos(x)}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)=0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\cos(x)}{x+\sin(x)}\right)=1$.

k.Pour tout réel $x>0$, $x+\sin(x)+3\geqslant x+2$. Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$, il en vient que $\sqrt{x+\sin(x)+3}\geqslant\sqrt{x+2}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}=+\infty$.

Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sin(x)+3}=+\infty$.

l. Pour tout réel $x>0$, $2x^2-3x+\sin(4x)\geqslant 2x^2-3x-1$.

Or, pour tout réel $x>0$, $2x^2-3x-1=x^2\left(2-\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-3x-1)=+\infty$.

Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-3x+\sin(4x))=+\infty$.

► Correction 10 – Voir l'énoncé

a. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^5\mathrm{e}^{-x}=0$.

b. On a $\lim\limits_{x\to-\infty}x^5=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^5\mathrm{e}^{-x}=-\infty$.

c. Pour tout réel $x>0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{x^2}=16\times\dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{(4x)^2}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}4x=+\infty$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^X}{X^2}=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{x^2}=+\infty$.

d. Pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x}=\dfrac{\mathrm{e}^x\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)}=\dfrac{1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}{1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}=0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x}=1$.

e. On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x-1)=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x+x)=-\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x}=0$.

f. Pour tout réel non nul x,

$$\frac{3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}=\frac{x\mathrm{e}^x\left(3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^2x\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}=\frac{x}{\mathrm{e}^x}\times\frac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{\mathrm{e}^x}}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{\mathrm{e}^x}}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}}=3$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}=0$.

g. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x)=-\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3xe^x+4e^x+3x}{e^{2x}+e^x+1} = -\infty$.

h. Pour tout réel $x>0$, $\dfrac{e^{3x}}{28x} = \dfrac{3}{28}\times\dfrac{e^{3x}}{3x}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{3x} = +\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{28x} = +\infty$.

i. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 28x = -\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{3x}}{28x} = 0$.

j. Pour tout réel x, $e^x-3x^2+5x-1 = e^x\left(1-3\dfrac{x^2}{e^x}+5\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{e^x}\right)$ Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3x^2}{e^x}+5\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{e^x}\right) = 1$ par croissances comparées. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-3x^2+5x-1) = +\infty$.

k. Par ailleurs, en faisant simplement la règle de somme de limites, on obtient, $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-3x^2+5x-1) = -\infty$.

l. Pour tout réel $x>0$, $e^{-x}>0$. Ainsi, $e^x+e^{-x}>e^x$ et $\dfrac{e^x+e^{-x}}{x} > \dfrac{e^x}{x}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{x} = +\infty$.

m. Pour tout réel $x<0$, $e^x>0$. Ainsi, $e^x+e^{-x}>e^{-x}$. En divisant par $-x$ qui est positif, on a alors $-\dfrac{e^x+e^{-x}}{x} > \dfrac{e^{-x}}{-x}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{-x} = +\infty$. Par comparaison, on a donc, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{e^x+e^{-x}}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{x}\right) = -\infty$.

n. Puisque $\lim\limits_{x\to0}(e^x+e^{-x}) = e^0+e^0 = 2$, on a $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x+e^{-x}}{x} = +\infty$.

o. Puisque $\lim\limits_{x\to0}(e^x+e^{-x}) = e^0+e^0 = 2$, on a $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x+e^{-x}}{x} = -\infty$.

p. Pour tout réel x, $e^x \leqslant (2+\cos(x))e^x \leqslant 3e^x$.

Pour tout réel $x>0$, on a donc $\dfrac{e^x}{x} \leqslant \dfrac{(2+\cos(x))e^x}{x}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Par comparaison, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2+\cos(x))e^x}{x} = +\infty$.

q. Par ailleurs, pour tout réel $x<0$, on a $\dfrac{e^x}{x} \geqslant \dfrac{(2+\cos(x))e^x}{x} \geqslant \dfrac{3e^x}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3e^x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x} = 0$.

Par encadrement, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2+\cos(x))e^x}{x}$ existe et vaut 0.

r. Remarquons que pour tout réel x, $x^2e^{-x}-x = \dfrac{x^2}{e^x}-x$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{e^x}-x\right) = -\infty$.

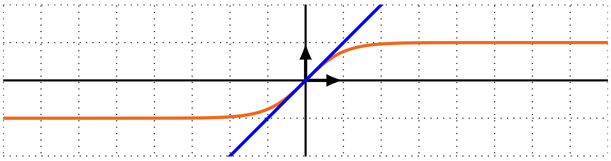
► Correction 11 – Voir l'énoncé

1. Pour tout réel $x>0$, $th(x) = \dfrac{e^x}{e^x}\times\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} th(x) = 1$.
   Par ailleurs, pour tout réel $x<0$, $th(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}}\times\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} th(x) = -1$.

2. th est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Cette fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$th'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-(e^{2x}-2-e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}.$$

3. th est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. L'équation de la tangente à la courbe de la fonction th en 0 est $y = th'(0)(x-0)+th(0)$.
   Or, $th'(0) = \dfrac{4}{(e^0+e^0)^2} = 1$ et $th(0) = \dfrac{e^0-e^0}{e^0+e^0} = 0$. Ainsi, l'équation de cette tangente est $y = x$.
5. 

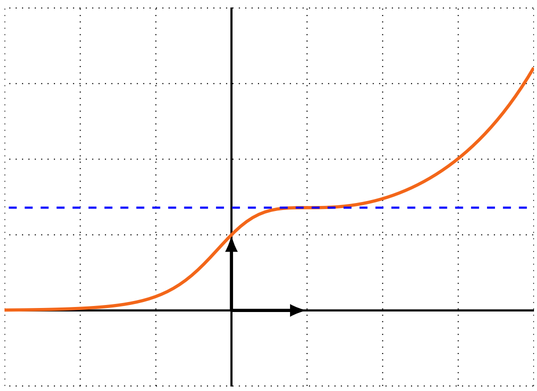
▶ Correction 12 – Voir l'énoncé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x^2+1}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, son dénominateur n'étant jamais nul. De plus, on a, pour tout réel x, $f(x) > 0$. f est de plus dérivable et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{e^x \times (x^2+1) - e^x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)^2 e^x}{(x^2+1)^2} \geqslant 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque sa dérivée est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs. La courbe de f a une tangente horizontale en 1 puisque $f'(1) = 0$. Par ailleurs, pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}$. Or, par croissance comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = 0$. f a donc les mêmes limites.

La courbe de la fonction f est la suivante. La tangente horizontale en 1 est également tracée.



Approfondissement et synthèse

▶ Correction 13 – Voir l'énoncé

f est définie pour tout réel $x \neq -1$.

Etude du signe de f

$2x+2$ s'annule en $x=-1$. x^2+3x-4 est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 et -4. On construit alors le tableau de signe de f.

x	$-\infty$		-4		-1		1		$+\infty$
$2x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+3x-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Étude des limites

Pour tout réel x différent de 0 et -1

$$f(x)=\frac{x^2}{x}\times\frac{1+\frac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}}{2+\frac{2}{x}}=x\times\frac{1+\frac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}}{2+\frac{2}{x}}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}}{2+\frac{2}{x}}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(2x+2)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^2+3x-4)=(-1)^2+3\times(-1)-4=-6$. En appliquant la règle des signes, on a alors $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=-\infty$. De la même manière, $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=+\infty$.

Étude des variations

Pour tout réel x, on pose $u(x)=x^2+3x-4$ et $v(x)=2x+2$. u et v sont dérivables sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$ et v ne s'annule pas sur ces intervalles. f est donc dérivable sur ces intervalles et pour tout réel $x\neq-1$, on a

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(2x+2)-(x^2+3x-4)\times 2}{(2x+2)^2}=\frac{x^2+2x+7}{(2x+2)^2}.$$

Puisque pour tout réel $x\neq-1$, $(2x+2)^2>0$, $f'(x)$ est du signe de x^2+2x+7. C'est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $\Delta=2^2-4\times7\times1=-24>0$. Ainsi, pour tout réel $x\neq 2$, $f'(x)>0$.

Résumé dans un tableau

On met toutes ces informations dans un tableau et on en profite pour vérifier si le tout est cohérent.

x	$-\infty$		-4		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		$\|\|$		$+$		
f	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

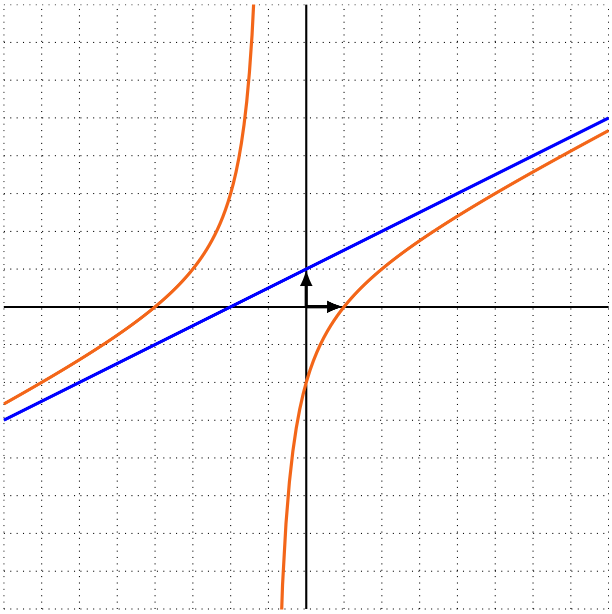
Pour tout réel $x \neq -1$,

$$\frac{x^2+3x-4}{2x+2} - \left(\frac{1}{2}x+1\right) = \frac{x^2+3x-4-\left(\frac{1}{2}x+1\right)(2x+2)}{2x+2}.$$

Ainsi,

$$g(x) = \frac{x^2+3x-4-x^2-x-2x-2}{2x+2} = -\frac{6}{2x+2}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{2x+2} - \left(\frac{1}{2}x+1\right)\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{2x+2} - \left(\frac{1}{2}x+1\right)\right) = 0.$



► Correction 14 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x,

$$ax+b+\frac{c}{x-1} = \frac{ax(x-1)+b(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}.$$

On cherche donc a, b et c tels que $a=1$, $b-a=0$ et $c-b=0$: on trouve $a=b=1$.
Ainsi, pour tout réel x, $\dfrac{x^2}{x-1} = x+1+\dfrac{1}{x-1}$.

On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1)) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1} = 0$, et de même en $-\infty$. La droite d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et $+\infty$.

► Correction 15 – Voir l'énoncé

1. $f(x)$ existe si et seulement si $x^2-3x+2 \geqslant 0$. Or, x^2-3x+2 est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 et 2. Ainsi, f est définie sur $]-\infty;1]\cup[2;+\infty[$.

2. Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-3x+2=+\infty$. Par ailleurs, pour tout $x>2$, $x^2-3x+2=x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3x+2=+\infty$. Or, $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$
3. f est dérivable sur $]-\infty;1[$ et $]2;+\infty[$. Pour tout réel x dans l'un de ces intervalles, $f'(x)=\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$ qui est du signe de $2x-3$.

x	$-\infty$		1	$3/2$	2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Pour tout réel x, $x^2-3x+2=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+2=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$.
5. Pour tout réel $x>2$,

$$f(x)=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}\times\sqrt{1-\frac{1}{4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}.$$

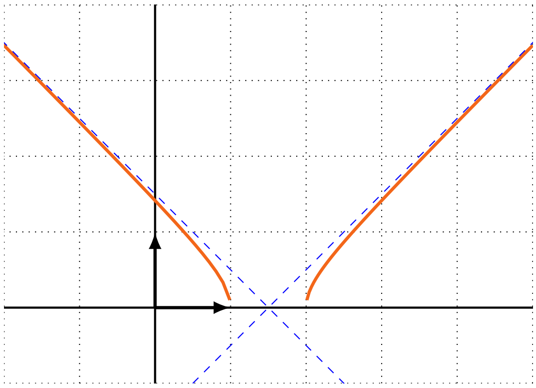
Or, si $x>2$, alors $x-\dfrac{3}{2}>0$ et donc $\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2}=x-\dfrac{3}{2}$. Ainsi, pour tout $x>2$,

$$f(x)-\left(x-\frac{3}{2}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}-1.$$

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right)=0$. La droite d'équation $y=x-\dfrac{3}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
Par ailleurs, pour tout $x<1$, $x-\dfrac{3}{2}<0$ et donc $\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{3}{2}-x$. Ainsi, pour tout $x<1$,

$$f(x)-\left(\frac{3}{2}-x\right)=\sqrt{1-\frac{1}{4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}-1.$$

On a donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(\dfrac{3}{2}-x\right)\right)=0$. La droite d'équation $y=\dfrac{3}{2}-x$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.

6. 

► Correction 16 – Voir l'énoncé

Partie A

1. Puisque la courbe de f passe par le point de coordonnées $(0;0{,}5)$, on a donc $f(0)=0{,}5$. Par ailleurs, $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en 0. Cette tangente est la droite (AB), dont le coefficient directeur vaut
$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-0{,}5}{10-0}=\frac{0{,}5}{10}=0{,}05.$$
On a donc $f'(0)=0{,}05$.
2. D'après la lecture graphique, $f(0)=0{,}5$. Or, d'après l'expression de $f(x)$, on a
$$f(0)=\frac{a}{1+\mathrm{e}^{-b\times 0}}=\frac{a}{1+\mathrm{e}^{0}}=\frac{a}{1+1}=\frac{a}{2}.$$
Ainsi, $\frac{a}{2}=0{,}5$, et donc $a=2\times 0{,}5=1$.
3. Pour tout réel x, on pose $u(x)=1+\mathrm{e}^{-bx}$. u est dérivable et pour tout réel x, $u'(x)=-b\mathrm{e}^{-bx}$. Or, $f=\frac{1}{u}$. Ainsi, $f'=-\frac{u'}{u^2}$ et donc, pour tout réel x,
$$f'(x)=-\frac{-b\mathrm{e}^{-bx}}{(1+\mathrm{e}^{-bx})^2}=\frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{(1+\mathrm{e}^{-bx})^2}$$
Attention, aux deux signes "-" !.
4. D'après la lecture graphique, $f'(0)=0{,}05$. Or, d'après l'expression de f',
$$f'(0)=\frac{b\mathrm{e}^{-b\times 0}}{(1+\mathrm{e}^{-b\times 0})^2}=\frac{b\mathrm{e}^{0}}{(1+\mathrm{e}^{0})^2}=\frac{b}{(1+1)^2}=\frac{b}{4}$$
Ainsi, $\frac{b}{4}=0{,}05$ et donc $b=0{,}05\times 4=0{,}2$.

Partie B

1. $p(10)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0{,}2\times 10}}\simeq 0{,}88$. La proportion d'individus équipés au 1er janvier 2030 est d'environ 0,88 (soit 88% de la population totale).
2. (a) D'après la partie A, p est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $p'(x)=\frac{0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2x}}{(1+\mathrm{e}^{-0{,}2x})^2}$. Or, une exponentielle étant toujours strictement positive, on a, pour tout réel x, $p'(x)>0$. La fonction p est donc strictement croissante.

(b) Pour tout réel $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$ et donc $1+\mathrm{e}^{-0,2x} > 1$. En appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur $]0;+\infty[$, on obtient alors $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}} < 1$. Ce résultat est cohérent : une proportion ne peut dépasser 1.

(c) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0.2x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = 1$. A terme, tous les individus possèderont l'équipement étudié ici.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

1. (a) On a $u = \exp(v)$ où $v : x \mapsto 2 - \dfrac{x}{10}$. Pour tout réel x positif, on a

$$u'(x) = v'(x) \times \exp(v(x)) = -\frac{1}{10}\exp(v(x)) = -\frac{1}{10}u(x).$$

(b) Pour tout réel positif x, on a

$$f'(x) = 10u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = 10 \times \left(-\frac{1}{10}u(x)\mathrm{e}^{u(x)}\right) = -u(x)\mathrm{e}^{u(x)}.$$

(c) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{u(x)} > 0$ et $-u(x) = \exp\left(2-\dfrac{x}{10}\right) > 0$. f est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2. (a) $f(20) = \dfrac{10}{e} \simeq 3.7$. Après 20 jours de repousse, la queue du lézard mesure environ 3.7 cm.

(b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{x}{10}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ *.Ainsi,* $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 10\mathrm{e}^0 = 10$.

(c) La fonction f est croissante et sa limite en $+\infty$ vaut 10. Elle ne peut donc atteindre 11. La queue du lézard ne peut pas atteindre 11cm selon cette modélisation.

3. (a) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{u(x)} > 0$ et $\dfrac{1}{10}u(x) < 0$. f'' est donc du signe opposé à celui de $(1+u(x))$. Or

$$1+u(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1-\exp\left(2-\frac{x}{10}\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 \leqslant \exp\left(2-\frac{x}{10}\right)$$

et donc

$$1+u(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant 2-\frac{x}{10} \Leftrightarrow 20 \geqslant x.$$

Ainsi, $f''(x)$ est positive sur $[0;20]$ et négative sur $[20;+\infty[$. f' est donc croissante sur $[0;20]$ et décroissante sur $[20;+\infty[$.

(b) La vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale au bout de 20 jours.