1. Cours : Orthogonalité dans l'espace

1 Produit scalaire de deux vecteurs

1.1 Définition du produit scalaire

Définition 1 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On considère des points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. L'angle non orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(\vec{u};\vec{v})$ est l'angle $\widehat{BAC}$, vu dans le plan (ABC).

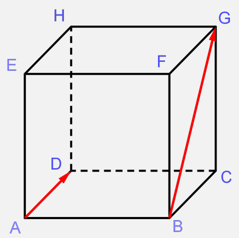
Définition 2 : Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **réel** notée $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et qui vaut

- 0 si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ vaut $\overrightarrow{0}$;
- $||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$ sinon.

Rappel de certaines valeurs remarquables

Degré	0	30	45	60	90	180
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

■ **Exemple 1 :** Dans un cube $ABCDEFGH$ de côté 1, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BG}$.



D'une part, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$. Ainsi, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}$.
L'angle $\widehat{HAD}$ mesure 45° ou $\frac{\pi}{4}$ radians.
$AD = 1$. Le théorème de Pythagore permet de montrer que $AH = \sqrt{2}$.
Ainsi, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH} = AD \times AH \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

■

Définition 3 : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Le vecteur $\vec{0}$ est en particulier orthogonal à tous les autres vecteurs.

1.2 Propriétés du produit scalaire

Propriété 1 : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, k et k' deux réels.

- $\vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$. En particulier, $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$, le produit scalaire est **symétrique**.
- $\vec{u}\cdot(k\vec{v}+k'\vec{w}) = k(\vec{u}\cdot\vec{v})+k'(\vec{u}\cdot\vec{w})$ et $(k\vec{v}+k'\vec{w})\cdot\vec{u} = k(\vec{v}\cdot\vec{u})+k'(\vec{w}\cdot\vec{u})$.
  Le produit scalaire est **bilinéaire**.

■ **Exemple 2 :** Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$, $\vec{v}\cdot\vec{w} = 5$, $\vec{u}\cdot\vec{w} = -1$ et $||\vec{u}|| = 4$. On a

$$(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(-3\vec{u}+4\vec{w}) = -3(\vec{u}\cdot\vec{u})+4(\vec{u}\cdot\vec{w})-6(\vec{v}\cdot\vec{u})+8(\vec{v}\cdot\vec{w}).$$

On remplace alors les valeurs par celle de l'énoncé en rappelant que $\vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$.

$$(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(-3\vec{u}+4\vec{w}) = -3\times 4^2+4\times(-1)-6\times 3+8\times 5 = -30$$

■

1.3 Formules de polarisation

Propriété 2 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2$;
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2$;
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = ||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2$.

Démonstration 1 : On utilise la bilinéarité du produit scalaire. On a

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2.$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2.$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2.$$

□

Propriété 3 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2)$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\frac{1}{2}(||\vec{u}-\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2)$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}-\vec{v}||^2)$.

Démonstration 2 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. D'après la propriété précédente, on a

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2 \quad \text{et} \quad ||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2.$$

En isolant $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans ces deux expressions, on retrouve les deux premiers points. De plus, en soustrayant ces deux égalités, on trouve que

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}-\vec{v}||^2 = 4\vec{u}\cdot\vec{v}.$$

Il suffit de diviser par 4 pour retrouver la dernière égalité recherchée. □

■ **Exemple 3 :** Soit A, B et C trois points de l'espace tels que $AB = 5$, $BC = 7$ et $AC = 8$. On a

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(||\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}||^2 - AB^2 - AC^2).$$

Or, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$, d'où

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(CB^2 - AB^2 - AC^2) = -\frac{1}{2}(7^2-5^2-8^2) = -20.$$

■

2 Base orthonormée

Définition 4 : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère de l'espace.

- On dit que la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est orthonormée si
  - $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = \vec{\imath}\cdot\vec{k} = \vec{\jmath}\cdot\vec{k} = 0$;
  - $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = ||\vec{k}|| = 1$.
- On dit alors que le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est un repère orthonormé.

Une famille orthonormée de trois vecteurs forme forcément une base de l'espace.

■ **Exemple 4 :** Si on considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1, le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace. ■

Propriété 4 : On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. Alors, $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$.

Démonstration 3 : Il suffit de revenir à la définition de coordonnées. On a

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k})\cdot(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}).$$

On développe alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}+xy'\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}+xz'\vec{\imath}\cdot\vec{k}+yx'\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}+yy'\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}+yz'\vec{\jmath}\cdot\vec{k}+zx'\vec{k}\cdot\vec{\imath}+zy'\vec{k}\cdot\vec{\jmath}+zz'\vec{k}\cdot\vec{k}.$$

Or, la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est orthonormé, les seuls produits scalaires non nuls sont $\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}$, et $\vec{k}\cdot\vec{k}$ qui valent 1. Ainsi,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'.$$

□

■ **Exemple 5 :** Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\\-6\end{pmatrix}$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times5+(-1)\times3+2\times-6 = 15-3-12 = 0.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. ■

Propriété 5 : On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.

Alors $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
En particulier, si $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ sont deux points de l'espace, alors

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

■ **Exemple 6 :** On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit $A(1;2;5)$ et $B(3;3;3)$. On a alors

$$AB = \sqrt{(3-1)^2+(3-2)^2+(3-5)^2} = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

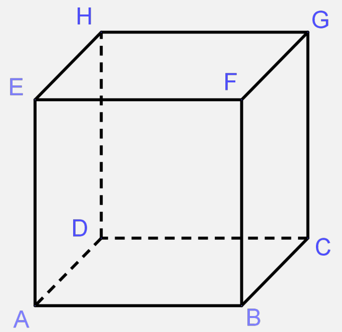
■

3 Orthogonalité

3.1 Droites orthogonales

Définition 5 : Soit (d) et (d') deux droites de l'espace. On dit que (d) et (d') sont orthogonales si les parallèles à ces deux droites passant par un même point sont perpendiculaires.

■ **Exemple 7 :** On considère un cube $ABCDEFGH$.



Les droites (AB) et (CG) sont orthogonales. En effet, la parallèle à (CG) passant par B est la droite (BF) qui est perpendiculaire à la droite (AB). ■

Propriété 6 : Deux droites (d) et (d'), dirigées respectivement par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, sont orthogonales si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

■ **Exemple 8 :** On se place dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les droites (d_1) et (d_2) définies par les représentations paramétriques suivantes.

$$(d_1)\,;\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 3+t \\ z = 2-t \end{cases} \quad \text{et} \quad (d_2)\,;\begin{cases} x = 5-3t \\ y = 3-2t \\ z = 2+4t \end{cases}$$

La droite (d_1) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et la droite (d_2) par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Le repère étant orthonormé, on peut calculer le produit scalaire de ces deux vecteurs comme suit :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times (-3) + 1 \times (-2) + (-1) \times 4 = 6 - 2 - 4 = 0.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Les droites (d_1) et (d_2) sont donc orthogonales. ■

3.2 Droite orthogonale à un plan

Définition 6 : Soit (d) une droite et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. On dit que (d) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ si elle est orthogonale à toute droite contenue dans le plan $\mathscr{P}$.

Propriété 7 — Théorème de la porte : Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace dirigé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. La droite (d) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = \vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Il suffit donc de montrer qu'une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan pour montrer qu'elle est en fait orthogonale à toute droites de ce plan.

■ **Exemple 9 :** On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les vecteurs $\vec{v_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ainsi que deux points $A(2;5;2)$ et $B(5;8;-1)$.

On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point O et dirigé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ (ces vecteurs n'étant pas colinéaires, on définit bien ainsi un plan). La droite (AB) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$. En effet,

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$
- Puisque l'on est dans un repère orthonormé, on peut calculer les produits scalaires à l'aide des coordonnées. On a alors
  - $\overrightarrow{AB} \cdot v_1 = 3 \times 1 + 3 \times 2 + (-3) \times 3 = 0$;
  - $\overrightarrow{AB} \cdot v_2 = 3 \times 1 + 3 \times 0 + (-3) \times 1 = 0$.
- Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. La droite (AB) est donc orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

■

3.3 Vecteur normal à un plan

Définition 7 : Soit $\mathscr{P}$ un plan et $\vec{n}$ un vecteur non nul. On dit que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ s'il est orthogonal à tout vecteur directeur du plan $\mathscr{P}$.

De la même manière que ce que l'on faisait avec les droites orthogonales à un plan, pour montrer qu'un vecteur est normal à un plan, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

■ **Exemple 10 :** On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par O et dirigé par les vecteurs $\vec{v_1}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$. En effet,

- Les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires. Ils définissent donc bien un plan.
- Puisque l'on est dans un repère orthonormé, il est possible de calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées,
- $\vec{u}\cdot\vec{v}_1 = 2\times 3+0\times 2+(-1)\times 6 = 0$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v}_2 = 2\times 1+0\times(-3)+(-1)\times 2 = 0$.

Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. $\vec{u}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. ■

Propriété 8 : Deux plans sont parallèles si et seulement si un vecteur normal au premier est normal au second.

■ **Exemple 11 :** On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère le plan $\mathscr{P}_2$ passant par $A(2;5;9)$, dirigé par $\vec{w_1}\begin{pmatrix}5\\4\\10\end{pmatrix}$ et $\vec{w_2}\begin{pmatrix}-2\\7\\-4\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, qui était normal au plan $\mathscr{P}$ de l'exemple précédent, est aussi normal au plan $\mathscr{P}_2$.

En effet, les vecteurs $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ ne sont pas colinéaires et définissent donc bien un plan. De plus, puisque l'on est dans un repère orthonormé, il est possible de calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées,

- $\vec{u}\cdot\vec{w}_1 = 2\times 5+0\times 4+(-1)\times 10 = 0$;
- $\vec{u}\cdot\vec{w}_2 = 2\times(-2)+0\times 7+(-1)\times(-4) = 0$.

Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$. $\vec{u}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_2$. Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}_2$ admettent un même vecteur normal, ils sont donc parallèles. ■

Définition 8 : Deux plans sont perpendiculaires si le premier plan contient une droite orthogonale au second plan.

Le concept de plans perpendiculaires peut être trompeur. Par exemple, deux plans perpendiculaires peuvent contenir des droites parallèles. En revanche, il est possible de caractériser la perpendicularité de deux plans en utilisant leurs vecteurs normaux.

Propriété 9 : Deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal du second.

4 Equation cartésienne d'un plan

Dans toute cette partie et dans la suivante, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

4.1 Equation cartésienne

Propriété 10 : Soit $\vec{n}$ un vecteur de l'espace et A un point de l'espace. L'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ est le plan passant par A admettant le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal.

Réciproquement, soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace, A un point de $\mathscr{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$. $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

Il est donc possible de décrire un plan à l'aide d'un point et d'un vecteur normal.

Propriété 11 : Soit $A(x_A,y_A,z_A)$ un point de l'espace et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A et admettant le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal.

Un point $M(x,y,z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0.$$

Cette équation est appelée équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

Réciproquement, si a, b, c et d sont quatre réels fixés, avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant $ax+by+cz+d=0$ est un plan auquel le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal.

Démonstration 4 : Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace. Le point M appartient au plan $\mathscr{P}$ passant par $A(x_A,y_A,z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$. Puisque le repère que l'on considère est orthonormé,

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A).$$

Ainsi, le point M appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$.

Réciproquement, a, b, c et d quatre réels fixés, avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. On supposera par exemple que $a\neq0$. On note alors $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

D'une part, l'ensemble $\mathscr{E}$ des points de l'espace vérifiant $ax+by+cz+d=0$ n'est pas vide. En effet, le point $A\left(-\frac{d}{a};0;0\right)$ appartient à cet ensemble.

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace et $A\in\mathscr{E}$. On a alors $ax_A+by_A+cz_A=-d$. Ainsi,

$$M\in\mathscr{E}\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0\Leftrightarrow ax+by+cz-ax_a-by_A-cz_A=0\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

C'est-à-dire $M\in\mathscr{E}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$. L'ensemble $\mathscr{E}$ est donc un plan admettant $\vec{n}$ comme vecteur normal. □

■ **Exemple 12 :** On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $3x+2y-3z+1=0$. Ce plan admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Considérons le point $A(1;1;2)$. On a $3\times1+2\times1-3\times2+1=0$. Les coordonnées du point A vérifient l'équation du plan $\mathscr{P}$. Le point A appartient donc au plan $\mathscr{P}$.

En revanche, le point $B(1;5;0)$ n'appartient pas à ce plan : on a $3\times1+2\times5-3\times0+1=14\neq0$. ■

■ **Exemple 13 :** Le plan $\mathscr{P}$ passant par $A(1;5;7)$ et admettant le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne $4(x-1)-2(y-5)+3(z-7)=0$ c'est-à-dire $4x-2y+3z-15=0$. ■

Il est aussi possible de raisonner comme suit : tout plan admettant le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$ comme vecteur normal admet une équation cartésienne de la forme $4x-2y+3z+d=0$ pour un certain réel d. Pour que ce plan passe par le point A, il faut que les coordonnées de A vérifient cette équation.

Autrement dit, $4\times1-2\times5+3\times7+d=0$, soit $15+d=0$ et donc $d=-15$.

4.2 Application : intersection d'une droite et d'un plan

■ **Exemple 14 :** On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+5y-3z+1=0$ et la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases}x=2-t\\y=5+t\\z=-2-2t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$. Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

On a $M(x;y;z)\in P\cap(d)$ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\begin{cases}x=2-t\\y=5+t\\z=-2-2t\\2x+5y-3z+1=0\end{cases}$

Résolvons ce système. En remplaçant les valeurs de x, y et z dans la dernière équation, on obtient

$$\begin{cases}x=2-t\\y=5+t\\z=-2-2t\\2(2-t)+5(5+t)-3(-2-2t)+1=0\end{cases}\quad\text{soit}\quad\begin{cases}x=2-t\\y=5+t\\z=-2-2t\\36+9t=0\end{cases}$$

Finalement, l'unique solution du système est

$$\begin{cases}t=-4\\x=2-(-4)=6\\y=5+(-4)=1\\z=-2-2\times(-4)=6\end{cases}$$

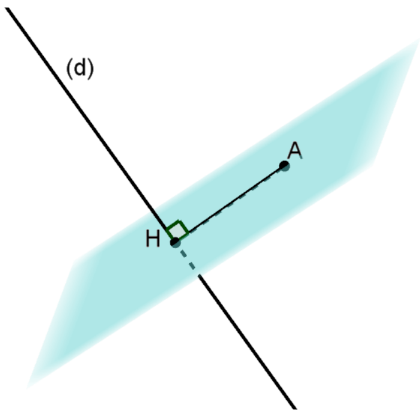
L'intersection de $\mathscr{P}$ et (d) est donc le point $M(6;1;6)$. ■

5 Projeté orthogonal

5.1 Projeté orthogonal sur une droite

Définition 9 : Soit A un point de l'espace et (d) une droite de l'espace, dirigée par un vecteur $\vec{u}$. On appelle projeté orthogonal de A sur (d) le point H de la droite (d) tel que $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$. En particulier,

- Si A appartient à la droite (d), ce point est son propre projeté,
- sinon, la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (d).



H est en fait l'intersection de la droite (d) et du plan $\mathscr{P}$ qui passe par le point A et auquel la droite (d) est normale. Si l'on connaît un point et un vecteur directeur de la droite (d), il est alors possible de déterminer sa représentation paramétrique, déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$, puis d'en déterminer le point d'intersection avec la méthode vue précédemment : nous déterminons ainsi le projeté orthogonal de A sur (d).

■ **Exemple 15 :** Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 3+t \\ z = 1-2t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$ et A le point de coordonnées $(3;3;3)$. On vérifie facilement que le point A n'appartient pas à la droite (d).

Un vecteur directeur de la droite (d) est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Notons alors $\mathscr{P}$ le plan passant par A est donc $\vec{u}$ est un vecteur normal : la droite (d) sera ainsi orthogonale à ce plan $\mathscr{P}$.

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donc

$$-(x-3)+(y-3)-2(z-3) = 0 \quad \text{soit} \quad -x+y-2z+6 = 0.$$

Le projeté orthogonal de A sur (d) est le point d'intersection de (d) et de $\mathscr{P}$.

Notons $(x;y;z)$ les coordonnées de ce point et t son paramètre dans l'équation de (d). On a alors $x = 1-t$, $y = 3+t$, $z = 1-2t$ et $-x+y-2z+6 = 0$. En remplaçant les valeurs de x, y et z dans cette dernière équation, on aboutit alors à

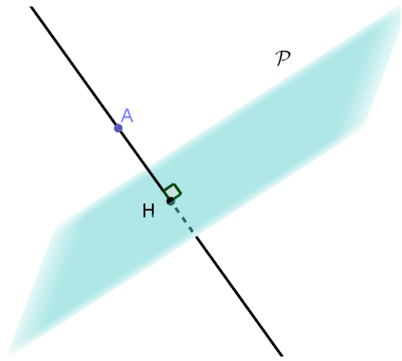
$$-(1-t)+(3+t)-2(1-2t)+6 = 0 \quad \text{soit} \quad 6t+6 = 0 \quad \text{et donc} \quad t = -1.$$

Ainsi, $x = 1-(-1) = 2$, $y = 3+(-1) = 2$ et $z = 1-2\times(-1) = 3$. Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est donc le point $H(2;2;3)$. ■

5.2 Projeté orthogonal sur un plan

Définition 10 : Soit A un point de l'espace, $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathscr{P}$. Le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ est le point d'intersection H du plan $\mathscr{P}$ et de la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{n}$. En particulier

- Si A appartient au plan $\mathscr{P}$, ce point est son propre projeté
- sinon, le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan $\mathscr{P}$



■ **Exemple 16 :** On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère le point A de coordonnées $(1;3;6)$, le point B de coordonnées $(1;1;1)$ et le plan $\mathscr{P}$ passant par B et dirigé par $\vec{v_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix}1\\10\\-4\end{pmatrix}$.
Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, on définit bien ainsi un plan.

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\\-5\end{pmatrix}$.
- Puisque l'on est dans un repère orthonormé, il est possible de calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées,
  - $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}_1 = 0\times 1+(-2)\times 0+(-5)\times 0 = 0$;
  - $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}_1 = 0\times 2+(-2)\times 10+(-5)\times(-4) = 0$;
- Ainsi, B appartient au plan $\mathscr{P}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal au plan $\mathscr{P}$. B est donc le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.

■

Là encore, une méthode similaire à la précédente peut être utilisée pour déterminer par le calcul les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan. Si l'on connaît l'équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}$ ainsi que les coordonnées d'un point A n'appartenant pas à ce plan, il est possible de déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.

Pour cela, on identifie un vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathscr{P}$ et on détermine une représentation paramétrique de la droite passant par A et admettant $\vec{n}$ comme vecteur directeur : cette droite est orthogonale au plan $\mathscr{P}$. Il nous reste alors à déterminer les coordonnées du point d'intersection de cette droite et de ce plan pour obtenir le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.

5.3 Distance à une droite ou un plan

Définition 11 : Soit A un point de l'espace et (d) une droite (ou $\mathscr{P}$ un plan).

On appelle distance de A à (d) (ou à $\mathscr{P}$) la plus petite distance AM pour M un point de la droite (d) (ou du plan $\mathscr{P}$).

■ **Exemple 17 :** Soit $A(2,1,3)$ et (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 5+t \\ z = -2-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Soit M un point de paramètre t de cette droite. On a alors

$$AM^2 = (2-(1-t))^2 + (1-(5+t))^2 + (3-(-2-2t))^2 = (1+t)^2 + (-4-t)^2 + (5+2t)^2.$$

Développons alors cette expression. On a

$$AM^2 = 1+2t+t^2+16+8t+t^2+25+20t+4t^2 = 6t^2+30t+42.$$

Ainsi, $AM = \sqrt{6t^2+30t+42}$. Or, pour tout réel t, $6t^2+30t+42 > 0$. On rappelle que si u est une fonction définie, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \sqrt{6t^2+30t+42}$ est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t,

$$f'(t) = \frac{12t+30}{2\sqrt{6t^2+30t+42}} = \frac{6t+15}{\sqrt{6t^2+30t+42}}.$$

Cette dérivée est du signe de $6t+15$. On sait par ailleurs que $6t+15 \geqslant 0$ si et seulement si $t \geqslant -\dfrac{5}{2}$. On peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	

La fonction f admet donc un minimum en $-\dfrac{5}{2}$. Par ailleurs,

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = \sqrt{6 \times \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 30 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 42} = \sqrt{\frac{75}{2} - 75 + 42} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi, la distance de A à (d) vaut $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

■

Propriété 12 : Soit $\mathscr{S}$ un plan ou une droite de l'espace.

Soit A un point de l'espace et H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{S}$.

Pour tout point K de l'ensemble $\mathscr{S}$,on a $AK \geqslant AH$: le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{S}$ est le point de l'ensemble $\mathscr{S}$ qui est le plus proche du point A. La distance du point A à l'ensemble $\mathscr{S}$ est alors égale à la distance AH.

Démonstration 5 : Soit K un point de $\mathscr{S}$. On a alors

$$AK^2 = ||\overrightarrow{AK}||^2 = ||\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HK}||^2 = ||\overrightarrow{AH}||^2 + 2\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HK} + ||\overrightarrow{HK}||^2.$$

Or, le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan ou à la droite $\mathscr{S}$, auquel appartiennent les points H et K. Ainsi, $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HK} = 0$. De plus, $||\overrightarrow{HK}||^2 \geqslant 0$. Ainsi, on a bien $AK^2 \geqslant AH^2$.

Finalement, les distances étant des quantités positives, par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a bien

$$AK \geqslant AH.$$

□

■ **Exemple 18 :** On considère la droite (d) et le point A de l'exemple précédent. On a vu que la distance de A à (d) valait $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ et que cette distance était atteinte pour le paramètre $t = -\dfrac{5}{2}$ dans la représentation paramétrique de (d) donnée.

Ainsi, le point le plus proche du point A est le point de coordonnées $(x;y;z)$ avec

$$\begin{cases} x = 1 - \left(-\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{7}{2} \\ y = 5 + \left(-\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{5}{2} \\ z = -2 - 2\times\left(-\dfrac{5}{2}\right) = 3 \end{cases}.$$

Le point $H\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{5}{2};3\right)$ est donc le projeté orthogonal du point A sur la droite (d). ■

2. Exercices

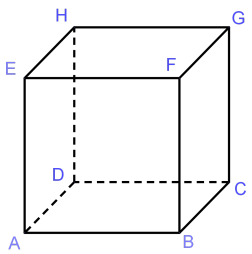
Produit scalaire

► Exercice 1 – Voir le corrigé

On considère trois points A, B et C tels que $AB = 7$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 14$. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

► Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes de longueur 1. Calculer les produits scalaires suivants



$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{ED}$
$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FG}$
$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{FB}$
$\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{ED}$

► Exercice 3 – Voir le corrigé

Est-il possible d'avoir 3 points de l'espace A, B et C tels que $AB = 3$, $BC = 6$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$?

► Exercice 4 – Voir le corrigé

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 5$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = -1$ et $||\vec{u}|| = 4$.

1. Que vaut $2\vec{u} \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w})$?
2. Que vaut $(3\vec{v} - 2\vec{u}) \cdot (4\vec{w} + \vec{u})$?

► Exercice 5 – Voir le corrigé

On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 4$. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $4\vec{v} - 3\vec{w}$.

► Exercice 6 – Voir le corrigé

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux tels que $||\vec{u}|| = 3$ et $||\vec{v}|| = 7$. Que valent $||\vec{u} + \vec{v}||$ et $||\vec{u} - \vec{v}||$?

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

1. $||\vec{u}|| = 2$, $||\vec{v}|| = 3$, $||\vec{u} - \vec{v}|| = 4$
2. $||\vec{u}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 2$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = 3$
3. $||\vec{u} - \vec{v}|| = 7$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = 12$

► Exercice 8 – Voir le corrigé

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{v}|| = 4$ et $||u \vec{-} v|| = 5$. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

► Exercice 9 – Voir le corrigé

Soit A, B et C trois points de l'espace tel que $AB + BC = AC$. Montrer que ces points sont alignés.

Base orthonormée

▶ Exercice 10 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. Montrer que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\\-9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

▶ Exercice 11 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. Soit x un réel. On considère les points $A(2;5;1)$, $B(3;1;2)$, $C(8;2;x)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. Pour quelle valeur du réel x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

▶ Exercice 12 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. Soit x un réel. On considère les points $A(3;4;2)$, $B(5;2;2x)$, $C(3;10;x)$. Pour quelles valeurs du réel x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

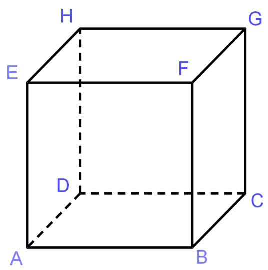
▶ Exercice 13 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$, $C(-1;1;1)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
3. Calculer les longueurs AB et AC.
4. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie eu degré près.

▶ Exercice 14 – Voir le corrigé

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes de longueur 1 ainsi que les points I, J et K, centres respectifs des faces $ABCD$, $BCGF$ et $ABFE$. On se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



1. Donner les coordonnées des points I, J et K dans ce repère.
2. Calculer $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}$
3. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{JIK}$.
4. Quelle est la nature du triangle IJK ?

▶ Exercice 15 – Voir le corrigé

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
2. Soit λ un réel et $\vec{V}=\vec{v}+\lambda\vec{u}$. Déterminer la valeur de λ pour que $\vec{V}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.
3. Soit μ_1 et μ_2 deux réels et $\vec{W}=\vec{w}+\mu_1\vec{V}+\mu_2\vec{u}$. Déterminer les valeurs de μ_1 et μ_2 pour que le vecteur $\vec{W}$ soit orthogonal aux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{u}$.
4. En déduire une base orthonormée de l'espace différente de $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

Ce procédé pour exhiber une base orthonormée à partir de vecteurs non coplanaires est appelé algorithme de Gram-Schmidt.

Orthogonalité

► Exercice 16 – Voir le corrigé

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points $A(2;5;1)$, $B(3;2;3)$ et $C(3;6;2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

► Exercice 17 – Voir le corrigé

On se place dans un cube $ABCDEFGH$.

1. Quelle est la nature du repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$?
2. Déterminer les coordonnées des points F, D, B et H dans ce repère.
3. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{BH}$.
4. Les droites (DF) et (BH) sont-elles perpendiculaires ?

► Exercice 18 – Voir le corrigé

On considère les points $A(2;1;5)$ et $B(3;2;3)$ ainsi que la droite Δ admettant pour représentation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = 4+3t \\ y = 2+t \\ z = -5+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Les droites (AB) et Δ sont-elles orthogonales ?

► Exercice 19 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. On considère deux droites (d_1) et (d_2) admettant pour représentations paramétriques respectives

$$(d_1) : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} (d_2) : \begin{cases} x = -5+2t' \\ y = -1+t' \\ z = 5 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u}_1$ de la droite (d_1) et un vecteur directeur $\vec{u}_2$ de la droite (d_2).
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$.
3. Montrer que le point $B(3;3;5)$ appartient à la droite (d_2).
4. Montrer que la droite Δ passant par le point B et dirigé par le vecteur $\vec{v}$ est perpendiculaire aux droites (d_1) et (d_2).

► Exercice 20 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(1;2;1)$, $B(3;4;1)$, $C(4;-1;6)$ et $D(6;1;6)$. Montrer que $ABDC$ est un rectangle.

► Exercice 21 – Voir le corrigé

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit $\overrightarrow{v_1}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par O et dirigé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.

▶ Exercice 22 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(3;-2;-2)$, $B(1;3;-8)$ et $C(-2;0;4)$ ainsi que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

▶ Exercice 23 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(1;3;-1)$, $B(2;4;1)$ et $C(0;1;1)$.

1. Justifier que les points A, B et C forment bien un plan.
2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

Equations cartésiennes de plan

Dans tous les exercices suivants, l'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé.

▶ Exercice 24 – Voir le corrigé

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x+2y-z+1=0$ ainsi que les points $A(2,-3,1)$, $B(0,0,1)$, $C(0,2,5)$ et $D(1,5,3)$.

1. Quels sont les points qui appartiennent au plan $\mathscr{P}$?
2. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

▶ Exercice 25 – Voir le corrigé

Soit P le plan d'équation $2x-5y+3z-2=0$ et (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=2-2t \\ y=1+t \\ z=1+3t \end{cases}$.

Montrer que la droite (d) est incluse dans le plan P.

▶ Exercice 26 – Voir le corrigé

Donner une équation cartésienne du plan passant par le point $A(2;5;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

▶ Exercice 27 – Voir le corrigé

On considère les points $A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$, $C(-1;1;1)$, $D(5;3;0)$.

1. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
2. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Le point D appartient-il à ce plan ?
4. Donner une équation cartésienne du plan parallèle au plan (ABC) passant par D.

▶ Exercice 28 – Voir le corrigé

Soit P_1 et P_2 les plans d'équations cartésiennes respectives $2x+3y-5z+1=0$ et $4x+6y-10z+3=0$. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont parallèles mais non confondus.

▶ Exercice 29 – Voir le corrigé

On considère les points $A(2;-1;0)$, $B(1;0;-3)$ et $C(6;6;1)$ ainsi que le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x-y-z+4=0$. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).

► Exercice 30 – Voir le corrigé

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection du plan P d'équation $2x-3y-2z+1=0$ et de la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=5-3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

► Exercice 31 – Voir le corrigé

On considère les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives $2x+y-z+3=0$ et $3x+2y-z+1=0$.

1. Donner un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$ et un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$. Ces plans sont-ils parallèles ?
2. Montrer que les points $A(1;1;6)$ et $B(2;0;7)$ appartiennent aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
3. En déduire une représentation paramétrique de $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$.

Projeté orthogonal

► Exercice 32 – Voir le corrigé

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère le point A de coordonnées $(5;1;3)$, le point B de coordonnées $(-2;-2;-2)$ et le plan $\mathscr{P}$ passant par B et dirigé par $\vec{v_1}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$.
On considère le point H de coordonnées $(2;4;1)$.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.
2. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$
3. Montrer que le point H appartient au plan $\mathscr{P}$.
4. Que peut-on en déduire sur le point H ?

► Exercice 33 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+4y-5z+1=0$ ainsi que le point $A(6;8;-9)$.

1. Le point A appartient-il au plan $\mathscr{P}$?
2. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathscr{P}$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$.
4. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}$.

► Exercice 34 – Voir le corrigé

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. L'espace est muni du repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE).
2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x+y+z-1=0$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (AG).
4. En déduire les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point G sur le plan (BDE).

► Exercice 35 (Amérique du nord 2021) – Voir le corrigé

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3y-2z+2=0$ dans un repère orthonormé. Montrer que le point $L(4,0,3)$ est le projeté orthogonal du point $M(5,3,1)$ sur le plan $\mathscr{P}$.

► Exercice 36 – Voir le corrigé

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère le point $A(3{,}5{,}1)$ et la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d) \quad : \quad \begin{cases} x = 1+3t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases} ,t \in \mathbb{R}$$

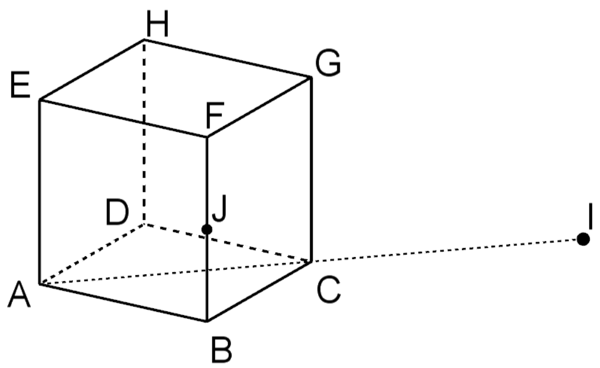
Soit M un point de la droite D, de paramètre t.

1. Montrer que la distance AM vaut $\sqrt{11t^2-22t+29}$.
2. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \sqrt{11x^2-22x+29}$.
   (a) Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   (b) Montrer que f admet un minimum en une valeur x_0 que l'on précisera. Que vaut ce minimum ?
3. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur la droite (d).

Exercices de synthèse

► Exercice 37 – Voir le corrigé

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté de longueur 1. L'espace est alors muni du repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. On considère le point I, symétrique du point A par rapport au point C ainsi que le point J, milieu du segment $[BF]$.



1. Donner, sans les justifier, les coordonnées des points I et J.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}$ est normal au plan (IJD)
3. En déduire une équation cartésienne du plan (IJD).
4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BH).
5. Déterminer les coordonnées du point K, point d'intersection du plan (IJD) et de la droite (BH).
6. Calculer $\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{KD}$ ainsi que les longueurs KB et KD.
7. En déduire une valeur arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BKD}$.

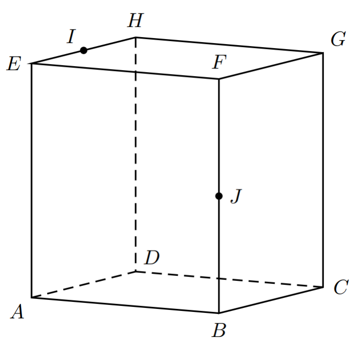
► Exercice 38 (Centres étrangers 2021) – Voir le corrigé

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants : $A(2;-1;0)$; $B(3;-1;2)$; $C(0;4;1)$ et $S(0;1;4)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan ABC en H.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).
   (b) Montrer que les coordonnées du point H sont $(2;2;3)$.
4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$. Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.
5. (a) Calculer la longueur SA.
   (b) On indique que $SB = \sqrt{17}$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

► Exercice 39 – Voir le corrigé

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ de côtés de longueur 1 représenté ci-dessous. On note I et J les milieux respectifs des segments $[EH]$ et $[FB]$.



L'espace est alors muni du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$.

1. Donner, sans les justifier, les coordonnées des points I et J.
2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (BGI).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
   (c) On note K le milieu du segment $[HJ]$. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?
3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.
   (a) En utilisant le triangle FIG pour base, montrer que le volume du tétraèdre $FBIG$ vaut $\dfrac{1}{6}$.
   (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   (c) La droite Δ coupe le plan (BGI) en F'. Montrer que le point F' a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{9}\,;\dfrac{4}{9}\,;\dfrac{5}{9}\right)$.
   (d) Calculer la longueur FF'. En déduire l'aire du triangle BGI.

3. Corrigés

Produit scalaire

► Correction 1 – Voir l'énoncé

On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$. Ainsi, $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{14}{7\times 4} = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi, $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ (ou 60°).

► Correction 2 – Voir l'énoncé

On a ...

- $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = AD\times AB\times\cos(\widehat{BAD}) = 1\times 1\times 0 = 0$
- $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FG} = AD\times FG\times\cos(0) = 1\times 1\times 1 = 1$
- $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{ED} = EH\times ED\times\cos(\widehat{HED}) = 1\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$
- $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{FB} = DH\times FB\times\cos(180°) = 1\times 1\times(-1) = -1$
- $\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{CE} = CG\times CE\times\cos(\widehat{GCE}) = 1\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1$. On utilise ici la relation $\cos = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ dans un triangle rectangle.
- $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{ED} = EG\times ED\times\cos(60°) = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2} = 1$

► Correction 3 – Voir l'énoncé

On aurait $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$ et donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{20}{18}$. Un cosinus étant toujours entre -1 et 1, c'est impossible.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

$2\vec{u}\cdot(3\vec{u}-2\vec{v}+4\vec{w}) = 6||\vec{u}||^2 - 4\vec{u}\cdot\vec{v} + 8\vec{u}\cdot\vec{w} = 96-12-8 = 76$

$(3\vec{v}-2\vec{u})\cdot(4\vec{w}+\vec{u}) = 12\vec{v}\cdot\vec{w} + 3\vec{v}\cdot\vec{u} - 8\vec{u}\cdot\vec{w} - 2||\vec{u}||^2 = 60+9+8-32 = 45$

► Correction 5 – Voir l'énoncé

On a alors $\vec{u}\cdot(4\vec{v}-3\vec{w}) = 4\vec{u}\cdot\vec{v} - 3\vec{u}\cdot\vec{w} = 12-12 = 0$

Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $4\vec{v}-3\vec{w}$.

► Correction 6 – Voir l'énoncé

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, ce qui implique que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. On a

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 = 3^2 + 2\times 0 + 7^2 = 58$$

et donc $||\vec{u}+\vec{v}|| = \sqrt{58}$

$$||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 = 3^2 - 2\times 0 + 7^2 = 58$$

et $||\vec{u}-\vec{v}|| = \sqrt{58}$

► Correction 7 – Voir l'énoncé

On a...

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\dfrac{1}{2}(||\vec{u}-\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2) = -\dfrac{1}{2}(4^2-3^2-2^2) = \dfrac{3}{2}$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2) = \dfrac{1}{2}(3^2-5^2-2^2) = -10$
3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{4}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2) = \dfrac{1}{4}(12^2-7^2) = \dfrac{95}{4}$

► Correction 8 – Voir l'énoncé

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\dfrac{1}{2}(||\vec{u}-\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2) = -\dfrac{1}{2}(5^2-3^2-4^2) = -\dfrac{1}{2}(25-9-16) = 0$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

► Correction 9 – Voir l'énoncé

On a alors $BA+BC = AC$. Or, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$. Utilisons alors les formules de polarisation.

On a $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -\dfrac{1}{2}(||\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}||^2 - AB^2 - BC^2) = -\dfrac{1}{2}(CA^2-AB^2-BC^2)$. En remplaçant CA par $BA+BC$, on a alors $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -\dfrac{1}{2}((BA+BC)^2-AB^2-BC^2) = -\dfrac{1}{2}(BA^2+2BA\times BC+BC^2-AB^2-BC^2) = BA\times BC$.

Or, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = AB\times BC\times\cos(\widehat{ABC})$. Il en vient que $\cos(\widehat{ABC}) = -1$ et que l'angle entre les vecteurs $\widehat{ABC}$ mesure donc 180 degrés. Cela signifie que les points A, B et C sont alignés (et même que le point B se situe entre A et C).

Base orthonormée

► Correction 10 – Voir l'énoncé

On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times 3+5\times 3-9\times 2 = 0$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

► Correction 11 – Voir l'énoncé

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-3\\x-1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, c'est-à-dire $1\times 6-4\times(-3)+1\times(x-1) = 0$ c'est-à-dire $19+x = 0$ d'où $x = -17$

► Correction 12 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\2x-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\6\\x-2\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, c'est-à-dire $2\times 0-2\times 6+(2x-2)\times(x-2) = 0$

On a donc $2x^2-6x-8 = 0$. C'est un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et 4. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $x = -1$ ou $x = 4$

► Correction 13 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-1)\\2-2\\4-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-(-1)\\1-2\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

Puisque l'on est dans un repère orthonormé, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 0+0\times -1+4\times 1 = 4$.
On a $AB=\sqrt{2^2+0^2+4^2}=\sqrt{20}$ et $BC=\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$.
On sait que $4=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$.
Ainsi, $\sqrt{20}\times\sqrt{2}\times\cos(\widehat{BAC})=4$ d'où $\cos(\widehat{BAC})=\dfrac{2}{\sqrt{10}}$ et l'angle $\widehat{BAC}$ mesure environ 51 degrés (utiliser arccos ou $\cos^{-1}$ sur la calculatrice).

► Correction 14 – Voir l'énoncé

Les points I, J et K ont pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$ comme coordonnées respectives dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

On a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0.5\\0\\0.5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\-0.5\\0.5\end{pmatrix}$. Puisque le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est orthonormé,

$$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}=0.5\times 0-0\times 0.5+0.5\times 0.5=0.25=\frac{1}{4}$$

On sait de plus que $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}=IJ\times IK\times\cos(\widehat{JIK})$. Or,

- $IJ=\sqrt{0.5^2+0^2+0.5^2}=\sqrt{0.5}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $IK=\sqrt{0^2+(-0.5)^2+0.5^2}=\sqrt{0.5}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ainsi, $\cos(\widehat{JIK})=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{2}$ et donc $\widehat{JIK}=\dfrac{\pi}{3}$.

Puisque $IJ=IK$, le triangle IJK est isocèle en I. On a donc $\widehat{JKI}=\widehat{IJK}$. Or, $\widehat{JIK}=\dfrac{\pi}{3}$ et la somme des angles d'un triangle vaut π radians. On a donc $\widehat{JKI}=\widehat{IJK}=\dfrac{\pi}{3}$. Le triangle IJK est donc équilatéral.

► Correction 15 – Voir l'énoncé

1. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires. Sont donc a et b des réels tels que $\vec{u}=a\vec{v}+b\vec{w}$.
   On a alors $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\a+b\\a\end{pmatrix}$, ce qui est impossible. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont donc pas coplanaires.
2. On souhaite que $\vec{V}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux. On a donc $\vec{V}\cdot\vec{u}=0$. Or, $\vec{V}\cdot\vec{u}=(\vec{v}+\lambda\vec{u})\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{u}+\lambda\vec{u}\cdot\vec{u}$.
   De plus, $\vec{v}\cdot\vec{u}=1$ et $\vec{u}\cdot\vec{u}=2$. Ainsi, $\vec{V}\cdot\vec{u}=0$ si et seulement si $1+2\lambda=0$ soit $\lambda=-\dfrac{1}{2}$. On considère donc $\vec{V}=\vec{v}-\dfrac{1}{2}\vec{u}$. Le vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}$.
3. On souhaite que $\vec{W}$ et $\vec{V}$ soient orthogonaux. On a donc $\vec{W}\cdot\vec{V}=0$. Or, $\vec{W}\cdot\vec{V}=(\vec{w}+\mu_1\vec{V}+\mu_2\vec{u})\cdot\vec{V}=\vec{w}\cdot\vec{V}+\mu_1\vec{V}\cdot\vec{V}+\mu_2\vec{u}\cdot\vec{V}$.
   De plus, $\vec{w}\cdot\vec{V}=\dfrac{1}{2}$, $\vec{V}\cdot\vec{V}=\dfrac{3}{2}$ et $\vec{u}\cdot\vec{V}=0$. Ainsi, $\vec{W}\cdot\vec{V}=0$ si et seulement si $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mu_1=0$ soit $\mu_1=-\dfrac{1}{3}$.
   On souhaite que $\vec{W}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux. On a donc $\vec{W}\cdot\vec{u}=0$. Or, $\vec{W}\cdot\vec{u}=(\vec{w}+\mu_1\vec{V}+\mu_2\vec{u})\cdot\vec{u}=\vec{w}\cdot\vec{u}+\mu_1\vec{V}\cdot\vec{u}+\mu_2\vec{u}\cdot\vec{u}$.

De plus, $\vec{w}\cdot\vec{u}=1$, $\vec{V}\cdot\vec{u}=0$ et $\vec{u}\cdot\vec{u}=2$. Ainsi, $\vec{W}\cdot\vec{u}=0$ si et seulement si $1+2\mu_2=0$ soit $\mu_2=-\dfrac{1}{2}$.

On considère donc $\vec{W}=\vec{w}-\dfrac{1}{3}\vec{V}-\dfrac{1}{2}\vec{u}$. Le vecteur $\vec{W}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$.

4. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ forment une base orthogonale de l'espace. Pour avoir une base orthonormé, il suffit de diviser chacun de ces vecteurs par sa norme.

Orthogonalité

► Correction 16 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times1-3\times1+2\times1=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Les droites (AB) et (AC) sont donc orthogonales. De plus, ces droites ont le point A en commun, elles sont donc perpendiculaires.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

Ce repère est orthonormé.

On a $F(1,0,1)$, $D(0,1,0)$, $B(1,0,0)$, $H(0,1,1)$, $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BH}=-1\times(-1)+1\times1-1\times1=1\neq0$. Les droite (DF) et (BH) ne sont pas perpendiculaires.

► Correction 18 – Voir l'énoncé

La droite Δ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$. La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Par ailleurs, $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=1\times3-1\times1-2\times2=0$. Les droites (AB) et Δ sont orthogonales.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

1. Le vecteur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ dirige la droite (d_1). Le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ dirige la droite (d_2).
2. On considère le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$.
   - $\vec{v}\cdot\vec{u}_1=1\times1-2\times(-1)-3\times1=0$;
   - $\vec{v}\cdot\vec{u}_2=1\times2-2\times1-3\times0=0$.

   $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$.
3. En prenant $t'=4$ dans l'équation de (d_2), on obtient le point de coordonnées $(3;3;5)$. Le point $B(3;3;5)$ appartient à la droite (d_2)
4. La droite Δ passant par le point B et dirigé par le vecteur $\vec{v}$ est perpendiculaire à la droite (d_2). En effet $\vec{v}$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux et les deux droites ont en commun le point B. On sait de plus que (d_1) et Δ sont orthogonales. Il reste à montrer qu'elles sont sécantes.

Une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x=3+t' \\ y=3-2t' \\ z=5-3t' \end{cases}, t'\in\mathbb{R}$.

Chercher l'intersection de (d_1) et Δ revient à chercher deux réels t et t' tels que $\begin{pmatrix} 2+t \\ 3-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+t' \\ 3-2t' \\ 5-3t' \end{pmatrix}$.
La dernière ligne permet d'exprimer t en fonction de t'. remplaçons t par $5-3t'$ dans la première ligne. On obtient alors $2+5-3t'=3+t'$ d'où $t'=1$. Puisque $t=5-3t'$, on a alors $t=2$.
Vérifions : en remplaçant t par 2 dans l'équation de (d_1), on obtient le point de coordonnées $(4;1;;2)$. En replaçant t' par 1 dans l'équation de Δ, on obtient le point de coordonnées $(4;1;2)$. Les droites Δ et (d_1) sont donc sécantes. Puisqu'elles sont orthogonales, elles sont donc perpendiculaires.
Ainsi, Δ est perpendiculaire à (d_1) et (d_2).

► Correction 20 – Voir l'énoncé

D'une part, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-2 \\ 1-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 6-4 \\ 1-(-1) \\ 6-6 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Les points A, B, C et D sont donc coplanaires et $ABDC$ est un parallélogramme.

De plus, on a $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 6-3 \\ 1-4 \\ 6-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=2\times3-2\times3+0\times5=0$. L'angle $\widehat{ABD}$ est un angle droit. $ABDC$ est un parallélogramme ayant un angle droit, c'est donc un rectangle.

► Correction 21 – Voir l'énoncé

Puisque le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est orthonormé, on a donc

- $\vec{v}_1\cdot\vec{u}=1\times2+4\times(-1)+1\times2=0$;
- $\vec{v}_2\cdot\vec{u}=3\times2-1\times1-2\times2=0$.

Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$. $\vec{u}$ est normal au plan P.

► Correction 22 – Voir l'énoncé

On a

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times(1-3)+2\times(3-(-2))+1\times(-8-(-2))=0$;
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-2-3)+2\times(0-(-2))+1\times(4-(-2))=0$.

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Il est donc normal au plan (ABC).

► Correction 23 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}2$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les points A, B et C ne sont donc pas alignés et forment donc un plan.

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC).

On a alors $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et donc $x+y+2z=0$. Ainsi, on a $x=-y-2z$.

On a également $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ et donc $-x-2y+2z=0$. En remplaçant x par $-y-2z$, on trouve alors $y+2z-$

$2y+2z=0$ et donc $-y+4z=0$ soit $y=4z$.

Prenons alors $z=1$. On a alors $y=4$ et $x=-4-2=-6$. On peut alors vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-6\\4\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

Équations cartésiennes de plan

► Correction 24 – Voir l'énoncé

On regarde quels sont les points dont les coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{P}$. Pour le point A, on a $3\times 2+2\times(-3)-1+1=0$, le point A appartient au plan $\mathscr{P}$. De même, les points B et C appartiennent à ce plan. En revanche, $3\times 1+2\times 5-3+1=11\neq 0$. Le point D n'appartient donc pas au plan $\mathscr{P}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, les point A, B et C ne sont donc pas alignés. Ils définissent bien un plan (ABC) qui n'est autre que le plan $\mathscr{P}$. Or, D n'appartient pas à ce plan, les points A, B, C et D ne sont donc pas coplanaires.

► Correction 25 – Voir l'énoncé

Pour tout réel t, $2(2-2t)-5(1+t)+3(1+3t)-2=4-4t-5-5t+3+9t-2=0$. Tous les points de la droite (d) appartiennent donc au plan P.

► Correction 26 – Voir l'énoncé

Une équation cartésienne du plan passant par le point $A(2;5;-1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est $2(x-2)-3(y-5)+(z+1)=0$ c'est-à-dire $2x-3y+z+12=0$.

► Correction 27 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. Ainsi,

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times 2+(-1)\times 0+(-1)\times 4=0$;
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times 0+(-1)\times(-1)+(-1)\times 1=0$.

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal eu plan (ABC).

Le plan (ABC) passe par A et admet le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal. Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $2(x-(-1))-1(y-2)-1(z-0)$, c'est-à-dire $2x-y-z+4=0$.

Le plan parallèle au plan (ABC) passant par D admet également le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal. Une équation de ce plan est donc $2(x-5)-(y-3)-(z-0)=0$ c'est-à-dire $2x-y-z-7=0$.

► Correction 28 – Voir l'énoncé

Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4\\6\\-10\end{pmatrix}$ sont normaux respectivement aux plans P_1 et P_2. Ces vecteurs sont colinéaires, les plans P_1 et P_2 sont donc parallèles.

► Correction 29 – Voir l'énoncé

Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$. De plus,

- $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 2(1-2)-(0-(-1))-(-3-0) = -2-1-3 = 0$;
- $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC} = 2(6-2)-(6-(-1))-(1-0) = 8-7-1 = 0$.

Le vecteur $\vec{u}$ est donc également normal au plan (ABC). Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont donc parallèles.

► Correction 30 – Voir l'énoncé

Supposons qu'il existe un point $M(x;y;z)$ dans $P\cap(d)$. On a alors $\begin{cases} x=1+t\\ y=1+2t\\ z=5-3t\\ 2x-3y-2z+1=0\end{cases}$.

En remplaçant les x, y et z de la dernière ligne, on obtient. $2(1+t)-3(1+2t)-2(5-3t)+1=0$ c'est-à-dire $t=5$. Vérifions : en remplaçant t par 5 dans l'équation de (d), on obtient le point de coordonnées $(6;11;-10)$. Or, $2\times 6-3\times 11-2\times(-10)+1=0$. Ce point appartient également au plan P.

► Correction 31 – Voir l'énoncé

Un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$ est le vecteur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$. Un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$ est le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont donc pas parallèles. On a par ailleurs

- $2x_A+y_A-z_A+3 = 2\times 1+1-6+3=0$. Le point A appartient à $\mathscr{P}_1$.
- $2x_B+y_B-z_B+3 = 2\times 2+0-7+3=0$. Le point B appartient à $\mathscr{P}_1$.
- $3x_A+2y_A-z_A+1 = 3\times 1+2\times 1-6+1=0$. Le point A appartient à $\mathscr{P}_2$.
- $3x_A+2y_A-z_A+1 = 3\times 2+2\times 0-7+1=0$. Le point B appartient à $\mathscr{P}_2$.

L'intersection de deux plans sécants étant une droite, on a donc $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2=(AB)$. Or, les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$ étant $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, une représentation paramétrique de $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$ est donc $\begin{cases} x=1+t\\ y=1-t\\ z=6+t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Projeté orthogonal

► Correction 32 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-3\\3\\-2\end{pmatrix}$. De plus, $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{v}_1 = -3\times 2+3\times 4-2\times 3=0$ et $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{v}_2 = -3\times 1+3\times 3-2\times 3=0$. Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$, il est donc normal à ce plan.

Une équation du plan $\mathscr{P}$ est $-3(x+2)+3(y+2)-2(z+2)=0$ soit $-3x+3y-2z-4=0$.

Par ailleurs, $-3x_H+3y_H-2z_H-4 = -3\times 2+3\times 4-2\times 1-4=0$. Le point H appartient donc au plan $\mathscr{P}$.

Le point H est en réalité le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

► Correction 33 – Voir l'énoncé

On a $2x_A+4y_A-5z_A+1=2\times 6+4\times 8-5\times(-9)+1=90\neq 0$. A n'appartient donc pas au plan $\mathscr{P}$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.

Une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A dirigée par $\vec{n}$ est $\begin{cases}x=6+2t\\ y=8+4t\\ z=-9-5t\end{cases}$ $,t\in\mathbb{R}$.

Le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}$ n'est autre que l'intersection de la droite (d) et du plan $\mathscr{P}$.

Résolvons donc le système $\begin{cases}x=6+2t\\ y=8+4t\\ z=-9-5t\\ 2x+4y-5z+1=0\end{cases}$.

La dernière ligne nous donne $2(6+2t)+4(8+4t)-5(-9-5t)+1=0$ soit $12+4t+32+16t+45+25t+1=0$ d'où $45t+90=0$ et donc $t=-2$. Ainsi, on a $\begin{cases}t=-2\\ x=2\\ y=0\\ z=1\end{cases}$. Le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ a pour coordonnées $(2;0;1)$.

► Correction 34 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. De plus, $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AG}=-1\times 1+0\times 1+1\times 1=0$ et $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AG}=-1\times 1+1\times 1+0\times 1=0$. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs du plan (BDE), il est donc normal au plan (BDE).

Le plan (BDE) admet $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur normal et passe par $B(1{,}0{,}0)$. Il admet donc comme équation cartésienne $(x-1)+(y-0)+(z-0)=0$ c'est-à-dire $x+y+z-1=0$.

La droite (AG) passe par $A(0{,}0{,}0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Cette droite admet donc pour représentation paramétrique le système $\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=t\end{cases}$ $,t\in\mathbb{R}$.

La droite (AG) passe par G et est orthogonale au plan (BDE). Le point d'intersection de (AG) et (BDE) est donc le projeté orthogonal de G sur (BDE). Un point de (AG) possède des coordonnées de la forme $(t{,}t{,}t)$ pour un certain réel t. Si ce point appartient au plan (BDE), on a de plus $t+t+t-1=0$ soit $t=\dfrac{1}{3}$. Le point K, point d'intersection du plan (BDE) et de la droite (AG), a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

► Correction 35 – Voir l'énoncé

D'une part, on a $x_L+3y_L-2z_L+2=4+3\times 0-2\times 3+2=0$. Le point L appartient donc au plan $\mathscr{P}$.

De plus, on a $\overrightarrow{LM}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. La droite (LM) est donc orthogonale au plan

$\mathscr{P}$. L est donc le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.

▶ Correction 36 – Voir l'énoncé

1. Les coordonnées du point M sont par conséquent $(1+3t\,;t\,;1-t)$. Le repère considéré est orthonormé. On utilise la formule de la distance :

$$AM = \sqrt{(1+3t-3)^2+(t-5)^2+(1-t-1)^2} = \sqrt{(3t-2)^2+(t-5)^2+(-t)^2}.$$

Ainsi,

$$AM = \sqrt{9t^2-12t+4+t^2-10t+25+t^2} = \sqrt{11t^2-22t+29}.$$

2. (a) Pour tout réel x, $11x^2-22x+29>0$. En effet, il s'agit d'un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $(-22)^2-4\times 11\times 29 = -792 < 0$. De plus, la fonction $x \mapsto 11x^2-22x+29$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{22x-22}{2\sqrt{11x^2-22x+29}} = \frac{11x-11}{\sqrt{11x^2-22x+29}}.$$

(b) Pour tout réel x, $\sqrt{11x^2-22x+29}>0$. $f'(x)$ est donc du signe de $11x-11$. De plus, $f(1) = \sqrt{11-22+29} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	$3\sqrt{2}$	↗	

f admet un minimum en 1. Ce minimum vaut $3\sqrt{2}$.

3. D'après la question 1, la distance entre A et un point M de la droite de paramètre t vaut $\sqrt{11t^2-22t+29}$, c'est-à-dire $f(t)$. Cette distance est minimale lorsque $t=1$, c'est-à-dire pour le point de coordonnées $(4{,}1{,}0)$: ce point est donc le projeté orthogonal de A sur la droite (d).

Exercices de synthèse

▶ Correction 37 – Voir l'énoncé

1. On a $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AC}$. Ainsi, le point I a pour coordonnées $(2{,}2{,}0)$. Par ailleurs, J est le milieu de $[BF]$, ses coordonnées sont donc $\left(1;0;\dfrac{1}{2}\right)$.
2. On a $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}1\\2\\-1/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1/2\end{pmatrix}$. Le repère considéré étant orthonormé, on a alors
   - $\overrightarrow{JI}\cdot\vec{n} = 1\times 1 - 2\times 2 - 6\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$;

- $\overrightarrow{JD} \cdot \vec{n} = 1 \times (-1) - 2 \times 1 - 6 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0.$

Le vecteur $\vec{n}$ est ainsi orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJD). Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}$ est normal au plan (IJD).

3. Le plan (IJD) passe par le point $I(2{,}2{,}0)$ et admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}$ comme vecteur normal. Une équation cartésienne de ce plan est donc $1 \times (x-2) - 2 \times (y-2) - 6 \times (z-0) = 0$ soit $x - 2y - 6z + 2 = 0$.
4. La droite (BH) passe par le point $B(1{,}0{,}0)$ et admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de cette droite est donc $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$, $\quad t \in \mathbb{R}$.
5. Le point d'intersection du plan (IJD) et de la droite (BH) doit avoir des coordonnées qui vérifient les deux équations.

   Soit $(x{,}y{,}z{,}t)$ quatre réels. On doit avoir $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = t \\ x - 2y - 6z + 2 = 0 \end{cases}$.

   En utilisant la dernière ligne, on a alors $(1-t) - 2t - 6t + 2 = 0$ soit $t = \dfrac{1}{3}$. On trouve alors $x = \dfrac{2}{3}$, $y = \dfrac{1}{3}$ et $z = \dfrac{1}{3}$. Réciproquement, on vérifie que le point $K\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ vérifient bien les équations du plan (IJD) et de la droite (BH) .
6. D'une part,
   $$\overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{KD} = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(0 - \frac{2}{3}\right) + \left(0 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(0 - \frac{1}{3}\right) \times \left(0 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}.$$

   Par ailleurs, $\overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{KD} = KB \times KC \times \cos(\widehat{BKD})$. Or,
   - $KB = \sqrt{\left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(0 - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(0 - \dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;
   - $KB = \sqrt{\left(0 - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(0 - \dfrac{1}{3}\right)^2} = 1.$
7. Ainsi, $\cos(\widehat{BKD}) = \dfrac{\overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{KD}}{KB \times KD} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

   L'angle $\widehat{BKD}$ mesure environ $125°$.

► Correction 38 – Voir l'énoncé

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\-1-(-1)\\2-0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-2\\4-(-1)\\1-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$. Puisque le repère est orthonormé, on a
   $$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + 0 \times 5 + 2 \times 1 = 0.$$

   Ainsi, les droites (AB) et (AC) sont orthogonales. Celles-ci se coupent au point A : ces droites sont donc perpendiculaires et l'angle $\widehat{BAC}$ est donc un angle droit. Le triangle BAC est rectangle en A.

2. (a) On a
   - $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + (1-) \times 2 = 0$;
   - $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-2) + 1 \times 5 + (-1) \times 1 = 0$.

   Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC), il est donc normal à ce plan.

   (b) Le plan (ABC) passe par le point A et admet le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal. Une équation cartésienne de ce plan est donc $2(x-2) + 1(y-(-1)) - 1(z-0) = 0$ soit $2x + y - z - 3 = 0$.

   (c) On a $2x_S + y_S - z_S - 3 = 2 \times 0 + 1 - 4 - 3 = -6 \neq 0$. Ainsi, le point S n'appartient pas au plan (ABC) car ses coordonnées ne vérifient pas l'équation de ce plan. Les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. (a) La droite (d) passe par le point S et admet le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur directeur. Une représentation paramétrique de cette droite est donc

$$(d) \quad : \quad \begin{cases} x = & & & 2t \\ y = & 1 & + & t \\ z = & 4 & - & t \end{cases} ,t \in \mathbb{R}.$$

   (b) D'une part, les coordonnées du point H vérifient l'équation du plan (ABC).
   En effet, $2 \times 2 + 2 - 3 - 3 = 0$. D'autre part, en prenant $t = 1$, on a bien $2t = 2$, $1 + t = 2$ et $4 - t = 3$. Le point H appartient donc aussi à la droite (d). Il s'agit donc du point d'intersection de (d) et (ABC).
   Il est également possible de remplacer x, y et z dans l'équation du plan par $2t$, $1+t$ et $4-t$. On trouve alors $t = 1$.

4. Prenons le triangle ABC comme base. Le triangle ABC est rectangle en A. Son aire vaut donc $\dfrac{AB \times AC}{2}$.
   Or,
   - $AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-1-(-1))^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5}$;
   - $AC = \sqrt{(0-2)^2 + (4-(-1))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$.

   Ainsi, l'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{30}}{2} = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.
   D'autre part, H est le projeté orthogonal du point S sur la plan (ABC). $[SH]$ est donc la hauteur du tétraèdre issue du point S. Or, $SH = \sqrt{(2-0)^2 + (2-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$.
   Ainsi, le volume du tétraèdre $(SABC)$ vaut $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{6} = 5$.

5. (a) On a $SA = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

   (b) On a $\overrightarrow{SA} \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-1 \\ 0-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SB} \begin{pmatrix} 3-0 \\ -1-1 \\ 2-4 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{SA} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SB} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 2 \times 3 - 2 \times (-2) - 4 \times (-2) = 18$$

   Or, $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos \widehat{ASB}$ et donccos$(\widehat{ASB}) = \dfrac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}}{SA \times SB} = \dfrac{18}{\sqrt{17} \times 2\sqrt{6}}$.
   Ainsi, $\widehat{ASB} \simeq 27{,}0°$.

► Correction 39 – Voir l'énoncé

1. Le point I a pour coordonnées $\left(0; \dfrac{1}{2}; 1\right)$. Le point J a pour coordonnées $\left(1; 0; \dfrac{1}{2}\right)$.

2. (a) Le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BG} = 1\times 0 - 2\times 1 + 2\times 1 = 0$;
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BI} = 1\times(-1) - 2\times 1/2 + 2\times 1 = 0$.

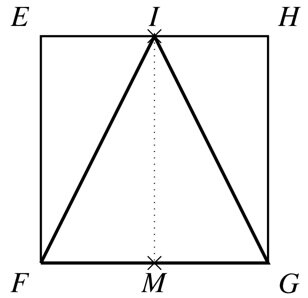
Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal a deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI). Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est donc normal au plan (BGI).

(b) Le point $B(1{,}0{,}0)$ appartient au plan (BGI), qui admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ comme vecteur normal. Une équation cartésienne de ce plan est donc $(x-1)-2(y-0)+2(z-0)=0$ soit $x-2y+2z-1=0$.

(c) On note K le milieu du segment $[HJ]$. Ce point a pour coordonnées $\left(\dfrac{0+1}{2};\dfrac{1+0}{2};\dfrac{1+\frac{1}{2}}{2}\right)$, c'est-à-dire $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$. Or, $\dfrac{1}{2}-2\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{3}{4}-1=0$. Les coordonnées du point K vérifient l'équation de (BGI). Le point K appartient donc au plan (BGI).

3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.

(a) Le triangle FIG est isocèle en I. Notons M le milieu de $[FG]$. La hauteur issue de I dans le triangle FIG est donc la droite (IM). Il en vient que l'aire de ce triangle vaut $\dfrac{FG\times IM}{2}$ soit $\dfrac{1\times 1}{2}$.



Dans le tétraèdre $FIGB$, la hauteur relative au triangle FIG est BF. Ainsi, le volume de ce tétraèdre vaut $\dfrac{\frac{1}{2}\times 1}{3}=\dfrac{1}{6}$.

(b) La droite Δ passant par $F(1{,}0{,}1)$ et orthogonale au plan (BGI). Elle est donc dirigée par le vecteur $\vec{n}$. Une représentation paramétrique de cette droite est donc

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2t \\ z = 1+2t \end{cases},t\in\mathbb{R}.$$

(c) La droite Δ coupe le plan (BGI) en F'. On résout

$$\begin{cases} x=1+t\\ y=-2t\\ z=1+2t\\ x-2y+2z-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t\\ y=-2t\\ z=1+2t\\ 1+t-2t+2(1+2t)-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2/9x=1-2/9\\ y=4/9\\ z=5/9\end{cases}.$$

Le point F' a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{9};\dfrac{4}{9};\dfrac{5}{9}\right)$.

(d) On a

$$FF' = \sqrt{\left(\frac{7}{9}-1\right)^2 + \left(\frac{4}{9}-0\right)^2 + \left(\frac{5}{9}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{81}+\frac{16}{81}+\frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Or, en utilisant le triangle BGI comme base, la hauteur du tétraèdre $FGBI$ relative à cette base n'est autre que (FF'). Si on note A_{BGI} l'aire du triangle (BGI), il en vient que le volume du tétraèdre vaut $\frac{A_{BGI} \times FF'}{3}$ soit $\frac{2A_{BGI}}{9}$. Or, d'après les questions précédentes, ce volume vaut $\frac{1}{6}$. Ainsi, $A_{BGI} = \frac{1}{6} \times \frac{9}{2} = \frac{3}{4}$.