1. Cours : Loi binomiale

1 Succession d’épreuves indépendantes

Définition 1 — Succession d’épreuves : Soit n un entier naturel. On considère n épreuves aléatoires dont les univers sont respectivement Ω_1, Ω_2, ... , Ω_n.

L’univers Ω de la succession de ces n épreuves est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.

Les issues de cette succession d’expériences sont les n-uplets $(i_1\,;\,i_2\,;\,\ldots\,;\,i_n)$ de $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.

■ **Exemple 1 :** On lance 2 fois un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on regarde le numéro obtenu. L’univers de cette expérience est $\{1;2;3;4;5;6\}^2$. L’issue $(1\,;\,3)$ signifie que l’on a obtenu 1 au premier lancer et 3 au deuxième. ■

Définition 2 — Indépendance mutuelle : Soit n un entier naturel. On considère n épreuves aléatoires dont les univers sont respectivement Ω_1, Ω_2, ... , Ω_n, de lois respectives $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$, ... , $\mathbb{P}_n$.

Les épreuves sont dites mutuellement indépendantes (ou tout simplement indépendantes) si, pour toute issue $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ de $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$, on a

$$\mathbb{P}((i_1,i_2,\ldots,i_n)) = \mathbb{P}_1(i_1) \times \mathbb{P}_2(i_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_n(i_n).$$

Autrement dit, la probabilité d’une issue est égale au produit des probabilités de chacune des composantes i_1, i_2, ..., i_n.

■ **Exemple 2 :** M. Lapeyronnie a décidé de faire un petit contrôle surprise à ses élèves. Il place les noms des élèves de la classe dans une urne et une liste d’exercices dans une autre.

- Il y a 29 élèves dans la classe. Parmi eux, 12 suivent l’option Maths expertes ;
- L’urne des exercices en contient 40 : 20 sur les fonctions, 15 sur les suites et 5 sur la géométrie.

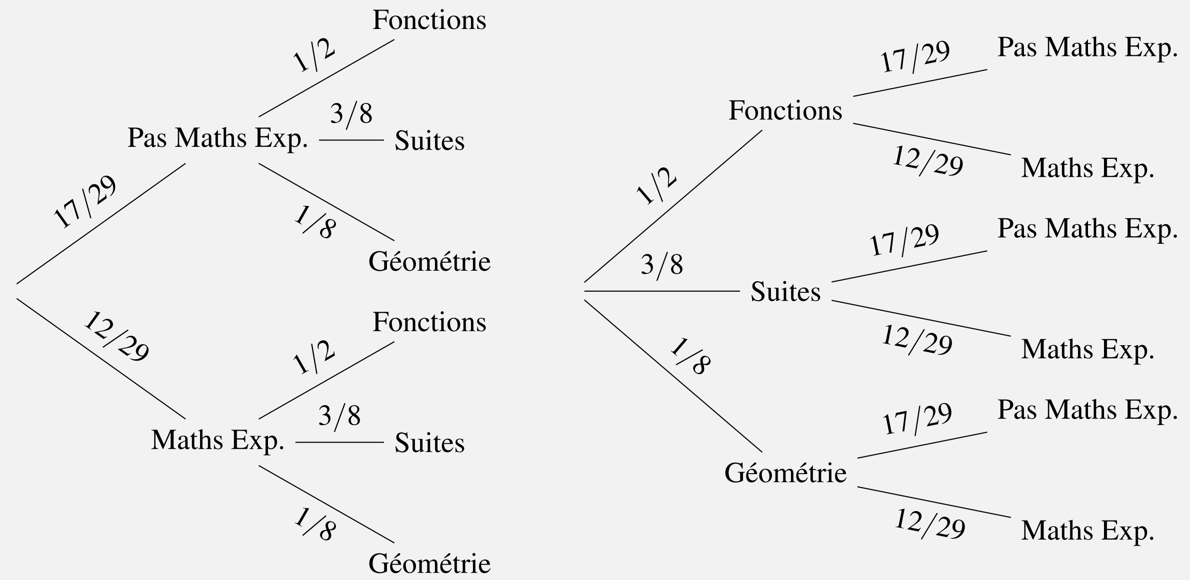
M. Lapeyronnie tire alors simultanément, de manière indépendante, un nom d’élève et un exercice.

- La probabilité qu’il s’agisse d’un élève suivant l’option Maths expertes est de $\dfrac{12}{29}$;
- La probabilité de tirer un exercice de géométrie est de $\dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8}$;
- La probabilité qu’un élève suivant l’option Maths Expertes soit envoyé au tableau faire un exercice de géométrie est donc de $\dfrac{12}{29} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{58}$.

■

Si l’on essaie de représenter une succession de n épreuves indépendantes sous la forme d’un arbre de probabilités, on place alors toujours le même sous-arbre à chaque noeud d’un étage fixé. De plus, cet arbre peut être construit "dans un sens comme dans l’autre".

■ **Exemple 3 :** Les arbres suivants traduisent la succession des deux épreuves précédentes.



■

■ **Exemple 4 :** Soit n un entier naturel. On lance n fois un dé équilibré à six faces, numérotées de 1 à 6.

La probabilité de ne jamais obtenir le résultat 6 sur ces n lancers est alors de $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Ainsi, la probabilité d'obtenir une au moins une fois le résultat 6 sur ces n lancers vaut donc $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Par ailleurs, puisque $-1<\frac{5}{6}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)=1$.

Si l'on lance un grand nombre de fois un dé classique à six faces, la probabilité d'obtenir au moins une fois le résultat 6 est proche de 1.

On peut alors se demander combien de lances effectuer pour que cette probabilité dépasse 0,99. On cherche alors l'entier n à partir duquel $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant 0{,}99$.

On a alors $-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant -0{,}01$ soit $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leqslant 0{,}01$. On applique alors la fonction logarithme népérien qui est croissante sur $]0;+\infty[$. On a donc $n\ln\left(\frac{5}{6}\right) \leqslant \ln(0{,}01)$. On divise alors par $\ln\left(\frac{5}{6}\right)$ qui est négatif, on aboutit à $n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$. Or, $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \simeq 25{,}3$.

Ainsi, à partir de 26 lancers de dés à six faces, on est certains à au moins 99% d'obtenir au moins une fois le résultat 6. ■

2 Epreuve de Bernoulli

Définition 3 — Epreuve de Bernoulli : Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire dont l'univers ne comporte que deux issues : le succès S et l'échec $\overline{S}$. On note p la probabilité de succès, aussi appelé paramètre de l'épreuve de Bernoulli. La probabilité d'échec vaut donc $1-p$.

Une variable aléatoire X sur cet univers suit une loi de Bernoulli de paramètre p si on a $\mathbb{P}(X=1)=p$ et $\mathbb{P}(X=0)=1-p$. On écrit $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Epreuve de Bernoulli

Issue	S	$\overline{S}$
Proba	p	$1-p$

Variable de Bernoulli

k	1	0
$\mathbb{P}(X=k)$	p	$1-p$

▪ **Exemple 5 :** On lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. Si on considère le succès "Obtenir le nombre 6", cette expérience est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=\frac{1}{6}$. ▪

Propriété 1 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. L'espérance, la variance et l'écart-type de X valent respectivement

$$E[X]=p, \quad V(X)=p(1-p), \quad \sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}$$

Démonstration 1 : La variable aléatoire X prend les valeurs 0 et 1. De plus $\mathbb{P}(X=0)=1-p$ et $\mathbb{P}(X=1)=p$. Ainsi,

$$E[X]=0\times\mathbb{P}(X=0)+1\times\mathbb{P}(X=1)=0\times(1-p)+1\times p=p$$

et

$$V(X)=\mathbb{P}(X=0)\times(0-E[X])^2+\mathbb{P}(X=1)\times(1-E[X])^2$$

d'où

$$V(X)=(1-p)\times(-p)^2+p\times(1-p)^2=p(1-p)(p+1-p)=p(1-p).$$

□

Démonstration 2 — Avec la formule de Koenig-Huygens : On sait que $V(X)=E[X^2]-(E[X])^2$.

Or, la variable aléatoire X vaut soit 0, soit 1. Par ailleurs, $0^2=0$ et $1^2=1$. X et X^2 ont donc la même loi.

Ainsi, $E[X^2]=E[X]=p$. Finalement, $V(X)=E[X^2]-(E[X])^2=p-p^2=p(1-p)$.

□

▪ **Exemple 6 :** Soit X un variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre 0,2.

On a alors $E[X]=0{,}2$, $V(X)=0{,}2\times0{,}8=0{,}16$ et $\sigma(X)=\sqrt{0{,}16}=0{,}4$. ▪

3 Loi binomiale

3.1 Schéma de Bernoulli

Définition 4 — Schéma de Bernoulli : Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1. Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est une succession de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**, chacune de paramètre p.

▪ **Exemple 7 :** On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On considère comme succès « la pièce tombe sur FACE ». Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres 5 et $\frac{1}{2}$. ∎

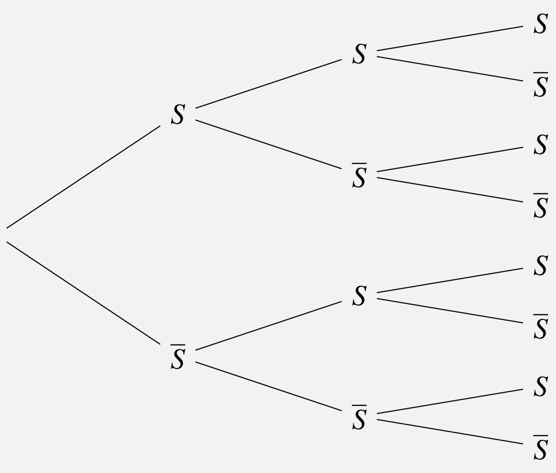
▪ **Exemple 8 :** On lance 42 fois de suite un dé. On considère comme succès « le dé tombe sur 5 ou 6 ». Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres 42 et $\frac{2}{3}$. ∎

3.2 Coefficients binomiaux

Définition 5 — Coefficient binomial : Soit n un entier naturel et k un entier compris entre 0 et n.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (k parmi n) est le nombre de chemins qui, dans un chemin de Bernoulli à n épreuves, aboutissent à exactement k succès.

▪ **Exemple 9 :** On considère un schéma de Bernoulli à 3 épreuves.



Pour obtenir 2 succès, il y a 3 chemins possibles : $SS\overline{S}$, $S\overline{S}S$ et $\overline{S}SS$. Ainsi, $\binom{3}{2} = 3$. ∎

Propriété 2 : Soit n un entier naturel et k un entier compris entre 0 et n. On a alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

On retrouve évidemment la formule établie lors du chapitre **Combinatoire et dénombrement**.

■ **Exemple 10 :** $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)\times(2\times1)} = 5\times2 = 10.$ ■

3.3 Loi binomiale

Définition

Définition 6 — Loi binomiale : Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1. On considère un schéma de Bernoulli à n épreuves de paramètre p. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

On écrit $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

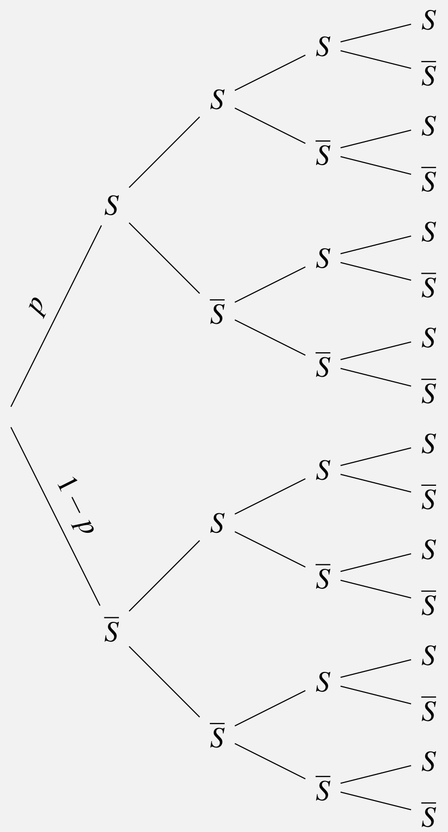
■ **Exemple 11 :** On lance une pièce équilibrée 5 fois de suite et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de FACE obtenus.

- On a bien des épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques ;
- Ces épreuves sont au nombre de 5.
- Pour chaque épreuve, la probabilité de succès (ici, la probabilité d'obtenir FACE) vaut $\frac{1}{2}$.

Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{2}$. ■

Calcul de probabilités

■ **Exemple 12 :** On considère un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et p. Ce schéma peut se traduire par l'arbre suivant :



Les chemins menant à deux succès sont $SS\overline{S}\overline{S}$, $S\overline{S}S\overline{S}$, $S\overline{S}\overline{S}S$, $\overline{S}SS\overline{S}$, $\overline{S}S\overline{S}S$ et $\overline{S}\overline{S}SS$. De plus,

- $\mathbb{P}(SS\overline{S}\overline{S}) = p\times p\times(1-p)\times(1-p) = p^2(1-p)^2$;
- $\mathbb{P}(S\overline{S}S\overline{S}) = p\times(1-p)\times p\times(1-p) = p^2(1-p)^2$;
- $\mathbb{P}(S\overline{S}\overline{S}S) = p\times(1-p)\times(1-p)\times p = p^2(1-p)^2$;
- $\mathbb{P}(\overline{S}\overline{S}SS) = (1-p)\times(1-p)\times p\times p = p^2(1-p)^2$;
- $\mathbb{P}(\overline{S}S\overline{S}S) = (1-p)\times p\times(1-p)\times p = p^2(1-p)^2$;
- $\mathbb{P}(\overline{S}SS\overline{S}) = (1-p)\times p\times p\times(1-p) = p^2(1-p)^2$. ■

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue de ce schéma. On a donc

$$\mathbb{P}(X=2) = 6p^2(1-p)^2.$$

En modifiant cette écriture, on a en réalité

$$\mathbb{P}(X=2) = \binom{4}{2}p^2(1-p)^{4-2}.$$

Propriété 3 : Soit n un entier naturel, p un réel compris entre 0 et 1 et X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Démonstration 3 : On considère un schéma de Bernoulli de paramètre p à n épreuves.

L'ensemble des issues aboutissant à k succès correspond à l'ensemble des n-uplets de $\{S;\overline{S}\}$ ayant exactement k fois la lettre S : il y en a $\binom{n}{k}$.

Or, chacune de ces issues a pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$: chacun des k succès a une probabilité de p et chacun des $n-k$ échecs a une probabilité $1-p$.

Ainsi, $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. □

■ **Exemple 13 :** On lance 3 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 fois le nombre 4 ?

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 4 obtenus. X suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ (le nombre de lancers) et $p=\frac{1}{6}$ (la probabilité de succès, obtenir 4, en un lancer). On cherche donc la probabilité de l'événement $X=2$, c'est-à-dire "obtenir exactement 2 succès".

$$\mathbb{P}(X=2)=\binom{n}{2}\times p^2\times(1-p)^{n-2}=\binom{3}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^1=3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{75}.$$

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le nombre 6 ?

On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenus. Y suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ (le nombre de lancers) et $p=\frac{1}{6}$ (la probabilité de succès, obtenir 6, en un lancer).

On cherche donc la probabilité de l'événement $Y\geqslant 1$, c'est-à-dire "obtenir au moins 1 succès". Il y a plusieurs manières de procéder.

- Décomposer l'événement $Y\geqslant 1$ en donnant tous les cas possibles : $Y=1$, $Y=2$ ou $Y=3$;
- Passer par le complémentaire : $\mathbb{P}(Y\geqslant 1)=1-\mathbb{P}(Y<1)$.
  Or, la seule valeur pour laquelle $Y<1$ est $Y=0$. Ainsi, $\mathbb{P}(Y\geqslant 1)=1-\mathbb{P}(Y=0)$.
  De plus, $\mathbb{P}(Y=0)=\binom{3}{0}\times\left(\frac{1}{6}\right)^0\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$.
  Finalement, $\mathbb{P}(Y\geqslant 1)=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$.

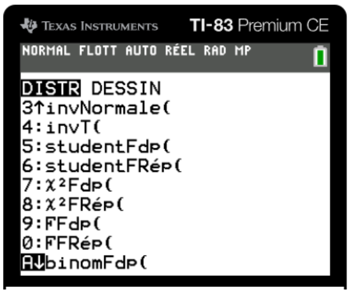
■

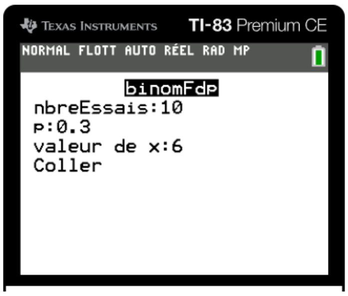
Avec la calculatrice

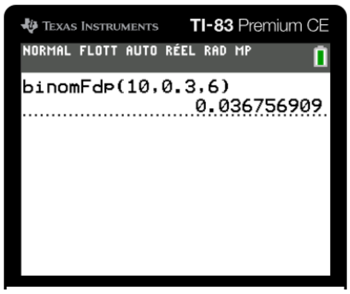
Texas Instruments : Appuyer successivement sur les touches **2nde** et **var**.

- Sélectionner **A binomFdp(** pour calculer une probabilité de la forme $\mathbb{P}(X=k)$.
- Sélectionner **B binomFrép(** pour calculer une probabilité de la forme $\mathbb{P}(X\leqslant k)$
- Pour calculer une probabilité de la forme $\mathbb{P}(X\geqslant k)$, on calculera $1-\mathbb{P}(X\leqslant k-1)$

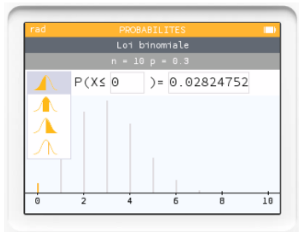
Entrer alors les paramètres de la loi binomiale et la valeur du k souhaité puis valider.



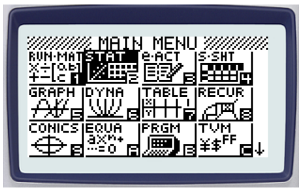


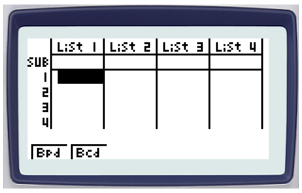


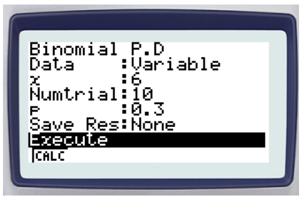
Numworks : Sélectionner **Probabilités** sur l'écran d'accueil, puis Binomiale. Entrer alors les valeurs des paramètres n et p puis valider.
Vous pouvez calculer des probabilités de la forme $\mathbb{P}(X \leqslant k)$, $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$, $\mathbb{P}(X \geqslant k)$ et $\mathbb{P}(X = k)$ en sélectionnant l'icône en haut à gauche de l'écran.

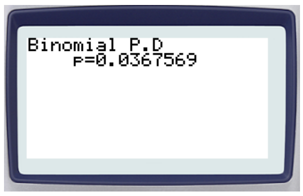


Casio Graph : Dans le menu principal, sélectionner **STAT**. Appuyer ensuite sur **F5 [DIST]** puis **F5 [BINM]**.
Pour le calcul de $\mathbb{P}(X = k)$, appuyer sur **F1 [Bpd]**. Pour le calcul de $\mathbb{P}(X \leqslant k)$, appuyer sur **F2 [Bcd]**.
Sur l'écran suivant, placer le curseur sur **Data** et appuyer sur **F2 [Var]**. Renseigner alors les valeurs des paramètres de la loi binomiale et les valeurs de k.









Espérance, variance, écart-type

Propriété 4 : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. L'espérance, la variance et l'écart-type de X valent respectivement

$$E[X] = np, \quad Var(X) = np(1-p), \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

■ **Exemple 14 :** Un élève répond au hasard et de manière indépendante à un QCM de 20 questions. Chaque question laisse le choix entre 4 propositions dont une seule est correcte.

On note X le nombre de bonnes réponses de l'élève. X désigne donc le nombre de succès (bonnes réponses) d'un schéma de Bernoulli à 20 épreuves, chaque épreuve ayant une probabilité de succès de $\frac{1}{4}$. X suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}\left(20, \frac{1}{4}\right)$.

Ainsi, $E[X] = 20 \times \frac{1}{4} = 5$. L'élève peut espérer avoir 5 bonnes réponses. ■